Plenum 12

Grundlagen der Optimierung
Wintersemester 2022

30.01.2023 und 31.01.2023

Richtungsableitung
Zusammenhang Subdifferential/Richtungsableitung
Weitere Eigenschaften konvexer Funktionen

Was sind die Highlights der Woche?

- gegenseitige Charakterisierung von Subdifferential und Richtungsableitung

Welche Fragen gibt es?

- Quizfrage 16.11 zu Folgerung 16.17
- Quizfrage 16.12 zu Lemma 16.20
- Satz 16.14
- Satz 16.16 inkl. Detail aus dem Beweis
- Lemma 16.18
- Monotonie des Differenzenquotienten

Richtungsableitung

Warum arbeitet man bei konvexen Funktionen mit einseitigen Richtungsableitungen

$$\lim_{t \searrow 0} \frac{f(x_0 + t\,d) - f(x_0)}{t}$$

und nicht mit beidseitigen Richtungsableitungen

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t\,d) - f(x_0)}{t} \quad ?$$

Interpretation von Satz 16.14

Wie kann man die Aussage (Satz 16.14)

$$f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0; x - x_0) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n$$

für Punkte $x_0 \in \mathbb{R}^n$, für die $f(x_0)$ endlich ist, interpretieren?

Subdifferential aus Richtungsableitung

Wie kann man die Aussage (Satz 16.16)

$$\partial f(x_0) = \left\{ s \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, s^\mathsf{T} d \leqslant f'(x_0; d) \text{ für alle } d \in \mathbb{R}^n \right\}$$

für Punkte $x_0 \in \mathbb{R}^n$, für die $f(x_0)$ endlich ist, veranschaulichen?

Richtungsableitung aus Subdifferential

Wie kann man die Aussage (Satz 16.16)

$$f'(x_0; d) = \sup\left\{s^\top d \,\middle|\, s \in \partial f(x_0)\right\} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

für Punkte $x_0 \in \operatorname{rel\,int\,dom} f$, für die $f(x_0)$ endlich ist, veranschaulichen?

Unbeschränktheit des Subdifferentials

Wie sehen die Subdifferentiale der folgenden Funktionen im Punkt $(0, 0)$ aus?

$$f(x_1, x_2) = |x_1|$$

und

$$g(x_1, x_2) = \begin{cases} |x_1| & \text{falls } x_2 = 0 \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

Veranschaulichung von Lemma 16.20

Es sei

- $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Menge
- $x_0 \in \operatorname{int} M$ und $B_R(x_0) \subseteq M$

Dann existieren

- affin unabhängige Punkte $v_0, \ldots, v_n \in M$
- $r > 0$,

sodass mit $\Delta := \operatorname{conv}(\{v_0, \ldots, v_n\})$ gilt:

$$B_r(x_0) \subseteq \Delta \subseteq B_R(x_0) \subseteq M.$$