Plenum 01

Grundlagen der Optimierung
Wintersemester 2022

24.10.2022 und 25.10.2022

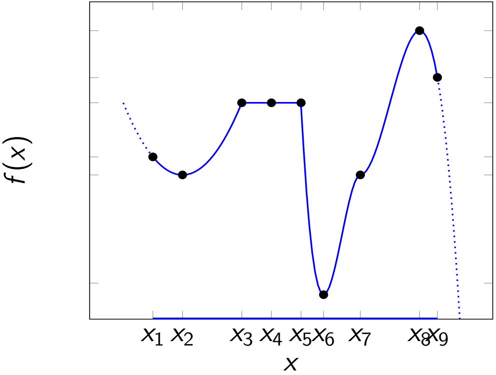
Modellierung
Grundbegriffe
Existenz von Minimierern
Optimalitätsbedingungen

Was sind die Highlights der Woche?

- Grundbegriffe der Problemcharakterisierung
- Existenzbeweis für Minimierer
- (In-)aktive Nebenbedingungen
- Optimalitätsbedingungen
- Quadratisches Wachstum
- Unterhalbstetigkeit
- Lemma 1.5

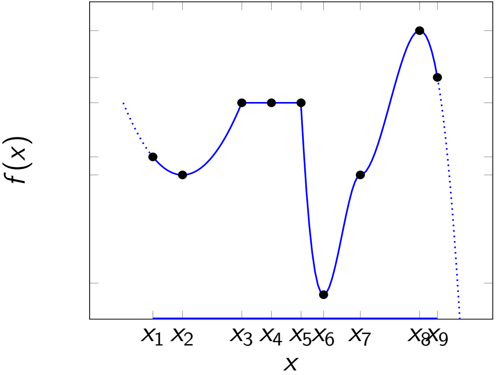
Welche Fragen gibt es?

- Warum müssen Nebenbedingungen in quadratischen Problemen affin linear sein?
- Visualisierung zur Unterhalbstetigkeit
- Bedeutung von $\pm\infty$ bei Box-Constraints
- Widerspruchsbeweis Rückrichtung Lemma 1.5 (Äquivalenz Unterhalbstetigkeit zu abgeschlossenen Sublevelmengen)
- Kombination Lemma 1.5 / Satz 1.6 möglich?
- Beweis Satz 3.2
- Besonderheiten der Taylorvariante Satz 2.1
- Diverse Quizfragen



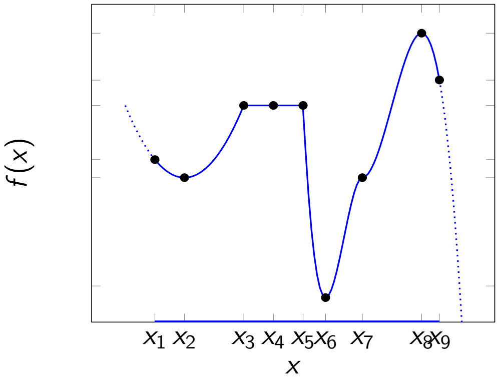
- Welche Minimierer-/Maximierereigenschaften haben die x_i?

Grundbegriffe



- Welche Minimierer-/ Maximierereigenschaften haben die x_i?
- Was gilt an Punkten wie x_4, die gleichzeitig lokaler Minimierer und lokaler Maximierer sind?

Grundbegriffe



- Welche Minimierer-/ Maximierereigenschaften haben die x_i?
- Was gilt an Punkten wie x_4, die gleichzeitig lokaler Minimierer und lokaler Maximierer sind?
- Wie sieht der Graph von $\hat{f}(x,y)\colon \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $\hat{f}(x,y) := f(x)$ aus und welche Bedeutung haben die Punkte (x_i, y) dann?

Visualisierung von Optimierungsaufgaben

Visualisieren (und Lösen) Sie die folgenden Optimierungsprobleme mit Hilfe von Isolinien.

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & -x_1 - x_2, \quad x \in \mathbb{R}^2 \\ \text{sodass} \quad & -x_2 \leqslant 0 \\ \text{und} \quad & -x_1 + 1 \leqslant 0 \\ & x_2 - \frac{1}{x_1} \leqslant 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & -x_1^2 - x_2^2, \quad x \in \mathbb{R}^2 \\ \text{sodass} \quad & -x_2 + x_1^2 \leqslant 0 \\ \text{und} \quad & x_2 + x_1^2 - 1 \leqslant 0. \end{aligned}$$

Visualisierung von Optimierungsaufgaben

Visualisieren (und Lösen) Sie die folgenden Optimierungsprobleme mit Hilfe von Isolinien.

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & -x_1 - x_2, \quad x \in \mathbb{R}^2 \\ \text{sodass} \quad & -x_2 \leqslant 0 \\ \text{und} \quad & -x_1 + 1 \leqslant 0 \\ & x_2 - \frac{1}{x_1} \leqslant 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & -x_1^2 - x_2^2, \quad x \in \mathbb{R}^2 \\ \text{sodass} \quad & -x_2 + x_1^2 \leqslant 0 \\ \text{und} \quad & x_2 + x_1^2 - 1 \leqslant 0. \end{aligned}$$

- Warum enthalten diese Beispiele keine Gleichungsnebenbedingungen?
- Wozu führt die zusätzliche Nebenbedingung

$$(x_2 - 1)^2 + (x_1 - 1)^2(x_1 + 1)^2 = 0?$$

Modellierungsaufgaben

Es folgen zwei Aufgaben zur Modellierung. Gesucht ist jeweils die Formulierung als mathematisches Optimierungsproblem:

- Was nehmen wir als Optimierungsvariable? Was bedeutet sie?
- Was nehmen wir als Zielfunktion?
- Welche Nebenbedingungen sind zu stellen?

Modellierung: Angebotsauswertung

Aufgabe 1: Ein Unternehmen will eine bestimmte Menge M eines Gutes einkaufen und holt dazu Angebote von n Lieferfirmen ein, von denen keine die gewünschte Gesamtmenge alleine liefern kann. Anbieter i liefert maximal die Menge m_i, wobei die Funktion $f_i(x_i)$ den Gesamtpreis in Abhängigkeit der Bestellmenge x_i angibt.

Aufgabe 2: Zu einer gegebenen Menge $C \subseteq \mathbb{R}^n$ und einem Punkt $p \in \mathbb{R}^n$ suchen wir einen Punkt in C, der p am nächsten liegt.

Optimierungsaufgaben ohne Minimierer

Wir suchen Beispiele für Optimierungsaufgaben, die keine lokalen oder globalen Minimierer besitzen, und zwar

1. mit Optimalwert $f^* = \infty$
2. mit Optimalwert $f^* = -\infty$
3. mit endlichem Optimalwert $f^* \in \mathbb{R}$

Satz (Existenz eines globalen Minimierers)

Die zulässige Menge $F \subseteq \mathbb{R}^n$ sei nichtleer. Weiter sei $f\colon F \to \mathbb{R}$ unterhalbstetig auf F. Für irgendein $m \in \mathbb{R}$ sei die Sub-Levelmenge

$$L := \{x \in F \mid f(x) \leqslant m\}$$

nichtleer und kompakt (abgeschlossen und beschränkt in $\mathbb{R}^n$). Dann besitzt die Aufgabe

$$\text{Minimiere} \quad f(x) \quad \text{über} \quad x \in F$$

mindestens einen globalen Minimierer.

Existenzsatz

Finden Sie Beispiele dafür, dass auf

1. die Unterhalbstetigkeit der Zielfunktion
2. die Abgeschlossenheit einer nichtleeren Sub-Levelmenge
3. die Beschränktheit einer nichtleeren Sub-Levelmenge

nicht verzichtet werden kann.

Bedingungen 1. und 2. Ordnung

Finden Sie Beispiele für folgende Situationen in 1D und/oder 2D:

1. Es liegt eine lokale Minimalstelle vor, und die hinreichende Bedingung 2. Ordnung ist erfüllt.
2. Es liegt eine lokale Minimalstelle vor, und die notwendigen Bedingungen 1. und 2. Ordnung sind erfüllt, aber nicht die hinreichende Bedingung 2. Ordnung.

Bedingungen 1. und 2. Ordnung

Finden Sie Beispiele für folgende Situationen in 1D und/oder 2D:

1. Es liegt eine lokale Minimalstelle vor, und die hinreichende Bedingung 2. Ordnung ist erfüllt.
2. Es liegt eine lokale Minimalstelle vor, und die notwendigen Bedingungen 1. und 2. Ordnung sind erfüllt, aber nicht die hinreichende Bedingung 2. Ordnung.
3. Es liegt keine lokale Minimalstelle vor, die notwendige Bedingung 1. Ordnung ist erfüllt, aber die notwendige Bedingung 2. Ordnung ist nicht erfüllt.
4. Es liegt keine lokale Minimalstelle vor, aber die notwendigen Bedingungen 1. Ordnung und 2. Ordnung sind beide erfüllt.