R. Herzog, G. Müller, M. Hashemi
Universität Heidelberg



# Übung 14

Ausgabedatum: 7. Februar 2023

**Hausaufgabe 14.1** (Epigraph-Reformulierung des Schnittebenenmodells) 4 Punkte

Zeigen Sie Lemma 22.2 aus dem Skript, also die folgende Aussage: Der Vektor $d \in \mathbb{R}^n$ ist genau dann ein (globaler) Minimierer von

$$m^{\text{CP}}(d) \coloneqq \max\big\{(s^{(j)})^\top d - \overline{\alpha}^{(j)} \,\big|\, j = 0, 1, \dots, k\big\}, \qquad \text{(Gleichung (22.3))}$$

wenn $(d, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ ein (globaler) Minimierer der Aufgabe

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & \xi \quad \text{über } (d, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \\ \text{unter} \quad & (s^{(j)})^\top d - \overline{\alpha}^{(j)} \le \xi, \quad j = 0, 1, \dots k \end{aligned} \qquad \text{(Gleichung (22.4))}$$

ist.

**Hausaufgabe 14.2** (Eigenschaften des Epsilon-Subdifferentials) 5.5 Punkte

Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie die folgende abgeschwächte Form von Satz 22.5 aus dem Skript:

(*i*) $\partial_0 f(x_0) = \partial f(x_0)$.

(*ii*) $\partial_\varepsilon f(x_0) \subseteq \partial_{\varepsilon'} f(x_0)$ für alle $0 \le \varepsilon \le \varepsilon'$ und insbesondere $\partial f(x_0) \subseteq \partial_\varepsilon f(x_0)$.

(*iii*) Für alle $\varepsilon \ge 0$ ist $\partial_\varepsilon f(x_0)$ konvex und kompakt.

(*iv*) Für $\varepsilon > 0$ ist $\partial_\varepsilon f\colon \mathbb{R}^n \to \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ außerhalbstetig ~~und innerhalbstetig~~.

**Beachte:** Der Satz ist im Skript für erweitert reellwertige Funktionen formuliert und wird noch an die hier vorliegende Formulierung angepasst. Die Innerhalbstetigkeit ist aufwändig und wird bspw. in Hiriart-Urruty, Lemaréchal, 1993, Abschnitt XI.4.1 gezeigt.

**Hausaufgabe 14.3** (Epsilon-Subdifferential des Betrags) 5 Punkte

Es sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ und $x_0$ in $\mathbb{R}$ gegeben. Bestimmen Sie $\partial_\varepsilon f(x_0)$.

**Hausaufgabe 14.4** (Umgebungsinformationen im Epsilon-Subdifferential) 5 Punkte

Es seien $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ konvex, $\dim \operatorname{dom} f = n$ und $x \in \operatorname{int}(\operatorname{dom} f)$. Wir wollen untersuchen, wann das Epsilon-Subdifferential Umgebungsinformationen für das Subdifferential beinhaltet, also wann für $r, \varepsilon > 0$ die Beziehung

$$\partial f(y) \subseteq \partial_\varepsilon f(x) \quad \text{für alle } y \in \overline{B_r(x)}. \tag{0.1}$$

gilt.

Zeigen Sie dafür:

($i$) Für jedes $r > 0$ mit $\overline{B_r(x)} \subseteq \operatorname{int}(\operatorname{dom} f)$ existiert ein (i. A. von $r$ und $x$ abhängiges) $\varepsilon > 0$, so dass (0.1) gilt.

($ii$) Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein (i. A. von $\varepsilon$ und $x$ abhängiges) $r > 0$, so dass (0.1) gilt.

| |
|---|
| Es ist keine Abgabe Ihrer Lösungen zu diesem Übungsblatt vorgesehen. |

## Literatur

Hiriart-Urruty, J.-B.; C. Lemaréchal (1993). *Convex Analysis and Minimization Algorithms. II.* Bd. 306. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften. Advanced theory and bundle methods. Berlin: Springer-Verlag. DOI: 10.1007/978-3-662-06409-2.