R. Herzog, G. Müller, M. Hashemi
Universität Heidelberg

Übung 12

Ausgabedatum: 24. Januar 2023

Hausaufgabe 12.1 (Monotonie des Subdifferentials) 5 Punkte

Es seien $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ eine konvexe Funktion und $x_1,\ x_2 \in \mathbb{R}^n$

(i) Zeigen Sie, dass das Subdifferential ein (mengenwertiger) monotoner Operator ist, also dass

$$(s_1 - s_2)^\intercal (x_1 - x_2) \geq 0 \tag{0.1}$$

für alle $s_i \in \partial f(x_i)$, $i = 1, 2$.

(ii) Zeigen Sie, dass Aussage (i) für strikt konvexes f und $x_1 \neq x_2$ mit echter Ungleichheit in (0.1) gilt.

(iii) Zeigen Sie für strikt konvexes f und $x_1, x_2 \in \operatorname{rel\,int}(\operatorname{dom} f)$ die Beziehung

$$\partial f(x_1) \cap \partial f(x_2) \neq \emptyset \iff x_1 = x_2.$$

Hausaufgabe 12.2 (Richtungsableitungen von Normen) 6 Punkte

Verifizieren Sie Beispiel 16.12, also die folgenden Aussagen für $d \in \mathbb{R}^n$:

(i) Für $f(x) = \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ ist

$$f'(x; d) = \sum_{\substack{i=1\\x_i>0}}^n d_i - \sum_{\substack{i=1\\x_i<0}}^n d_i + \sum_{\substack{i=1\\x_i=0}}^n |d_i|.$$

(ii) Für $f(x) = \|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{1/2}$ ist

$$f'(x;d) = \begin{cases} \frac{x^\top d}{\|x\|_2}, & \text{falls } x \neq 0, \\ \|d\|_2, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

(iii) Für $f(x) = \|x\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,n} |x_i|$ und $x \neq 0$ ist

$$f'(x;d) = \max\left\{(\operatorname{sgn} x_i)\, d_i \,\middle|\, i = 1,\ldots,n,\ |x_i| = \|x\|_\infty\right\}$$

sowie

$$f'(0;d) = \|d\|_\infty.$$

Hausaufgabe 12.3 (Kettenregel für die Richtungsableitungen) 4 Punkte

(i) Geben Sie ein Beispiel für Funktionen $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, $x_0 \in \operatorname{dom} g$ und $d \in \mathbb{R}$ an, das zeigt, dass i. A. keine Kettenregel für die Richtungsableitung gilt.

(ii) Wir können die Definition 16.11 der Richtungsableitung direkt auf vektorwertige Funktionen $f\colon R^n \to \mathbb{R}^m$ übertragen, indem wir fordern, dass der Grenzwert existieren muss, aber in jeder Komponente endlich ist.

Es seien $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$, $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gegeben, so dass

(a) die Richtungsableitung von g an x_0 in Richtung d existiert (und endlich ist),

(b) die Richtungsableitung von f an $g(x_0)$ in Richtung $g'(x_0;d)$ existiert (und endlich ist) und

(c) die Funktion f in einer Umgebung von $g(x_0)$ Lipschitz-stetig ist.

Zeigen Sie, dass in diesem Fall die Richtungsableitung von $f \circ g$ an x_0 in Richtung d existiert, und dass

$$f \circ g'(x_0;d) = f'(g(x_0); g'(x_0,d)) \qquad \text{für alle } d \in \mathbb{R}^n. \tag{0.2}$$

Hausaufgabe 12.4 (Richtungsableitung und Subdifferential für max diffbarer Funktionen) 6 Punkte

Es seien $C \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene und konvexe Menge und $f_i \colon C \to \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$, konvexe und stetig differenzierbare Funktionen sowie für $x \in C$

$$f(x) \coloneqq \max_{i=1,\dots,m} f_i(x)$$

und $A(x) \coloneqq \{i \in \{1, \dots, m\} \mid f_i(x) = f(x)\}$. Zeigen Sie:

(i) Die Funktion f besitzt für alle Richtungen $d \in \mathbb{R}^n$ die Richtungsableitung

$$f'(x, d) = \max_{i \in A(x)} f_i'(x) d.$$

(ii) Das Subdifferential der Funktion f ist

$$\partial f(x) = \operatorname{conv}\{f_i'(x)^\top \mid i \in A(x)\}.$$

Es ist keine Abgabe Ihrer Lösungen zu diesem Übungsblatt vorgesehen.