R. Herzog, G. Müller, M. Hashemi
Universität Heidelberg

Übung 11

Ausgabedatum: 17. Januar 2023

Hausaufgabe 11.1 (Konvexe Mengen mit konvexem Komplement) 4 Punkte

Stellen Sie eine Vermutung auf, welche Teilmengen des $\mathbb{R}^n$ konvex sind und konvexes Komplement haben und beweisen Sie Ihre Aussage.

Hausaufgabe 11.2 (Abg., konvexe Mengen sind Schnitt abg. Halbräume) 4 Punkte

Es sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene, konvexe Menge. Zeigen Sie, dass

$$C = \bigcap \{H \subseteq \mathbb{R}^n \mid H \text{ ist abgeschlossener Halbraum mit } C \subseteq H\}.$$

Hausaufgabe 11.3 (Endlichdimensionale Version des Satzes von Krein-Milman) 12 Punkte

Es sei $C \subseteq \mathbb{R}^n$ eine nichtleere, abgeschlossene, konvexe Menge. Zeigen Sie:

(i) Für jeden Punkt $\widehat{x} \in \operatorname{rel} \partial(C)$ existiert eine **eigentliche Stützhyperebene**, also eine Hyperebene $H(a, \beta)$, so dass

$$a^\top \widehat{x} = \beta \ge a^\top x \quad \text{für alle } x \in C \qquad \text{und} \qquad \beta > a^\top x \quad \text{für mindestens ein } x \in C.$$

(ii) Es sei $\widehat{x} \in \operatorname{rel} \partial(C)$ und $H(a, \beta)$ eine eigentliche Stützhyperebene zu C an $\widehat{x}$. Dann ist

$$\dim(H(a, \beta) \cap C) < \dim(C).$$

(iii) Es sei $\widehat{x} \in \operatorname{rel} \partial(C)$ und $H(a, \beta)$ eine Stützhyperebene zu C an $\widehat{x}$. Dann sind alle Extremalpunkte der nichtleeren, abgeschlossenen, konvexen Menge $C \cap H(a, \beta)$ auch Extremalpunkte von C.

und beweisen Sie damit eine endlichdimensionale Version des Satzes von Kreil-Milman:

(iv) Jede nichtleere, kompakte, konvexe Menge $C \subseteq \mathbb{R}^n$ ist die konvexe Hülle ihrer Extremalpunkte.

Hinweis: In Aussage (iv) können Sie induktiv über die Dimension der Menge C argumentieren.

Beachte: Aus Aussage (iv) folgt mit dem Satz 15.13 von Carathéodory sofort, dass jeder Punkt in C als die Konvexkombination von höchstens $\dim(C) + 1$ der Extremalpunkte von C dargestellt werden kann.

Hausaufgabe 11.4 (Hauptsatz der linearen Optimierung aus Sicht der konvexen Optimierung) 5 Punkte

(i) Es seien $C \subset \mathbb{R}^n$ eine nichtleere, kompakte, konvexe Menge und $f\colon C \to \mathbb{R}$ eine stetige, konvexe Funktion. Zeigen Sie, dass die Funktion f ihr *Supremum* in einem Extremalpunkt von C annimmt.

(ii) Nutzen Sie Aussage (i), um Satz 6.17 Aussage (iii) für beschränkte Polyeder zu beweisen, also die folgende Aussage:

Es sei P ein beschränktes Polyeder. Besitzt das Problem

$$\text{Minimiere} \quad c^\top x \quad \text{über } x \in P$$

eine Lösung, so ist auch ein Extremalpunkt (einer Ecke) von P eine Lösung.

Hausaufgabe 11.5 2 Punkte

Beweisen Sie Satz 16.3 aus dem Skript, also die folgende Aussage:

Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ eine Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Dann ist $\partial f(x_0)$ abgeschlossen und konvex.

Hausaufgabe 11.6 (Das Subdifferential von Normen) 6 Punkte

(i) Es sei $\|\cdot\|\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Norm und $\|\cdot\|^*\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ die dazugehörige duale Norm

$$\|s\|^* := \max\left\{\left|s^\top x\right| \,\middle|\, x \in \mathbb{R}^n \text{ und } \|x\| \le 1\right\}.$$

Zeigen Sie, dass für jedes $x_0 \in \mathbb{R}^n$

$$\partial\|x_0\| = \left\{ s \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \|s\|^* \leq 1 \text{ und } s^\top x_0 = \|x_0\| \right\}.$$

(ii) Nutzen Sie Aussage (i) um Beispiel 16.5 zu verifizieren, also um die folgenden Aussagen zu zeigen:

(a) Es gilt $s \in \partial\|x\|_1$ genau dann, wenn

$$s_i \in \begin{cases} \{-1\} & \text{falls } x_i < 0, \\ [-1, 1] & \text{falls } x_i = 0, \\ \{1\} & \text{falls } x_i > 0 \end{cases}$$

für alle $i = 1, \dots, n$.

(b)

$$\partial\|x\|_2 = \begin{cases} \left\{\frac{x}{\|x\|_2}\right\}, & \text{falls } x \neq 0, \\ \{s \in \mathbb{R}^n \mid \|s\|_2 \leq 1\}, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

(c) Für $x \neq 0$ gilt

$$\partial f(x) = \left\{ s \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \begin{array}{r} \|s\|_1 = 1,\ s_i \geq 0 \text{ für diejenigen } i \text{ mit } x_i = \|x\|_\infty, \\ s_i \leq 0 \text{ für diejenigen } i \text{ mit } -x_i = \|x\|_\infty, \\ \text{und } s_i = 0 \text{ für diejenigen } i \text{ mit } |x_i| < \|x\|_\infty \end{array} \right\}$$

sowie

$$\partial f(0) = \{s \in \mathbb{R}^n \mid \|s\|_1 \leq 1\}.$$

und

$$\partial\|0\|_\infty = \{s \in \mathbb{R}^n \mid \|s\|_1 \leq 1\}.$$

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass die duale Norm der p-Norm für $p \in [1, \infty]$ die q-Norm für $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ist.

Es ist keine Abgabe Ihrer Lösungen zu diesem Übungsblatt vorgesehen.