R. Herzog, G. Müller, M. Hashemi
Universität Heidelberg

Übung 9

Ausgabedatum: 13. Dezember 2022

Hausaufgabe 9.1 (Operationen auf konvexen Mengen) 9 Punkte

Beweisen Sie Satz 13.3 aus dem Skript, also die folgenden Aussagen:

(i) Es sei $\{C_j\}_{j \in J}$ eine beliebige Familie konvexer Mengen in $\mathbb{R}^n$. Dann ist $\bigcap_{j \in J} C_j$ konvex.

(ii) Es seien $C_i \subseteq \mathbb{R}^{n_i}$ konvex, $i = 1, \dots, k$. Dann ist das kartesische Produkt $C_1 \times \cdots \times C_k$ konvex in $\mathbb{R}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{n_k}$.

(iii) Es sei $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine (affin-)lineare Abbildung, also $f(x) = Ax + b$, und $C \subseteq \mathbb{R}^n$ und $D \subseteq \mathbb{R}^m$ konvexe Mengen. Dann sind das Bild $f(C) \subseteq \mathbb{R}^m$ und das Urbild $f^{-1}(D) \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex.

(iv) Sind $C_1, C_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex, dann sind

$$\beta C_1 = \{\beta x_1 \mid x_1 \in C_1\} \quad \text{für } \beta \in \mathbb{R}$$

sowie die **Minkowski-Summe**

$$C_1 + C_2 = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in C_1,\ x_2 \in C_2\}$$

konvex.

Hausaufgabe 9.2 (Stabilität von Abgeschlossenheit unter Bildung der konvexen Hülle.) 3 Punkte

Beweisen oder widerlegen Sie: Ist $M \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen, dann ist auch $\operatorname{conv}(M)$ abgeschlossen.

Hausaufgabe 9.3 (Extremalpunkte konvexer Mengen) 6 Punkte

Die Definition Definition 6.12 eines Extremalpunkts eines Polyeders können wir mit Hilfe der Beobachtungen in Hausaufgabe 4.2 direkt auf allgemeinere konvexe Mengen erweitern.

Definition (Extremalpunkte konvexer Mengen)**.**
Ein Vektor x aus einer konvexen Menge $C \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt ***Extremalpunkt*** *von C, wenn aus*

$$x = \alpha\, y + (1 - \alpha)\, z$$

für $y, z \in C$ und $\alpha \in (0, 1)$ bereits $y = z$ folgt.

(i) Bestimmen Sie, wieviele Extremalpunkte die abgeschlossene Kreisscheibe

$$K := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = r\} \quad r > 0$$

besitzt.

(ii) In Hausaufgabe 4.2 haben wir gezeigt, dass für jede Ecke eines Polyeders (jeden Extremalpunkt) eine lineare Funktion existiert, so dass die Ecke der eindeutige Minimierer der Funktion über dem Polyeder ist. Geben Sie ein Beispiel an, das zeigt, dass diese Aussage nicht für Extremalpunkte beliebiger kompakter, konvexer Menge gilt.

(iii) Es sei eine Menge von Punkten $V = \{x_1, \ldots, x_k\}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$ gegeben. Zeigen Sie, dass die Extremalpunkte von $\operatorname{conv}(V)$ in V liegen.

(iv) Es sei eine konvexe Menge $C \subseteq \mathbb{R}^n$ gegeben. Zeigen Sie, dass die Menge $\{x \in C \mid C \setminus \{x\} \text{ ist konvex}\}$ genau die Menge der Extremalpunkte von C ist.

Hausaufgabe 9.4 (Operationen auf konvexen Funktionen) 6 Punkte

Beweisen Sie Satz 13.16 aus der Vorlesung, also die folgenden Aussagen:

(i) Sind $f_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ konvex auf $\mathbb{R}^n$ und $\beta_i \geq 0$ für $i = 1, \ldots, m$, dann ist die durch

$$f(x) := \sum_{i=1}^{m} \beta_i\, f_i(x)$$

definierte Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ konvex auf $\mathbb{R}^n$.

(ii) Sind die Funktionen $f_i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ konvex auf $\mathbb{R}^n$ für alle i aus irgendeiner Indexmenge I, dann ist die durch das punktweise Supremum

$$f(x) := \sup\{f_i(x) \mid i \in I\}$$

definierte Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ konvex auf $\mathbb{R}^n$.

(*iii*) Ist $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ affin-linear und $f\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ konvex, so ist $(f \circ g)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ konvex auf $\mathbb{R}^n$.

(*iv*) Ist $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex und ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ konvex und monoton wachsend, so ist $(f \circ g)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ konvex.

Hausaufgabe 9.5 (Jensensche Ungleichung) 4 Punkte

Zeigen Sie, dass $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ genau dann konvex ist, wenn für jede beliebige endliche Mengen von Punkten $\{x_1, \ldots, x_k\} \in \mathbb{R}^n$ und beliebige $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)^\intercal \in \mathbb{R}^k$ mit $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$ und $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)^\intercal \geq 0$

$$f\Big(\sum_{i=1}^k \alpha_i\, x_i\Big) \leq \sum_{i=1}^k \alpha_i\, f(x_i)$$

gilt.

Es ist keine Abgabe Ihrer Lösungen zu diesem Übungsblatt vorgesehen.