Übung 8

Ausgabedatum: 6. Dezember 2022

Hausaufgabe 8.1 (Äquivalenzen (totaler) Unimodularität) 22 Punkte

Es sei $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$.

(i) Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) A ist total unimodular.

(b) $-A$ ist total unimodular.

(c) $A^\top$ ist total unimodular.

(d) $\begin{bmatrix} A, & -A \end{bmatrix}$ ist total unimodular.

(e) $\begin{bmatrix} A, & \mathrm{Id}_m \end{bmatrix}$ ist total unimodular.

(f) $\begin{bmatrix} A \\ \mathrm{Id}_n \end{bmatrix}$ ist total unimodular.

(g) $\begin{bmatrix} A, & 0_{m \times n} \\ \mathrm{Id}_n & \mathrm{Id}_n \end{bmatrix}$ ist total unimodular.

und dass diese Aussagen weiterhin äquivalent sind zu den Aussagen

(h) $\begin{bmatrix} A, & \mathrm{Id}_m \end{bmatrix}$ ist unimodular.

(i) $\begin{bmatrix} A \\ \mathrm{Id}_n \end{bmatrix}$ ist unimodular.

(ii) Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) A ist unimodular

(b) $A^\intercal$ ist unimodular

(c) $\begin{bmatrix} A, & 0_{m\times n} \\ \mathrm{Id}_n & \mathrm{Id}_n \end{bmatrix}$ ist unimodular.

Beachte: Wir sehen also, dass die (totale) Unimodularität der Gleichungsnebenbedingungsmatrizen von LPs stabil gegenüber Transformationen zwischen den verschiedenen Formulierungen des Problems (kanonische Form, Normalform, etc.) ist.

Hausaufgabe 8.2 12 Punkte

Es sei $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$.

(i) Zeigen Sie Satz 12.3 aus dem Skript, also dass die folgenden Aussagen äquivalent sind, falls $\operatorname{Rang}(A) = m$.

(a) A ist unimodular.

(b) Für jeden Vektor $b \in \mathbb{Z}^m$ besitzt das Polyeder

$$P_{\mathrm{NF}} \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^n \mid A\,x = b,\ x \geq 0\}$$

nur ganzzahlige Ecken.

(c) Für jedes Paar von Vektoren $b \in \mathbb{Z}^m$, $u \in \mathbb{Z}^n$ besitzt das Polyeder

$$P_{\mathrm{NFB}} \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^n \mid A\,x = b,\ x \geq 0,\ x \leq u\}$$

nur ganzzahlige Ecken.

(ii) Zeigen Sie Satz 12.5, also dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

(a) A ist total unimodular.

(b) Für jeden Vektor $b \in \mathbb{Z}^m$ besitzt das Polyeder

$$P_{\mathrm{KF}} \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^n \mid A\,x \leq b,\ x \geq 0\}$$

nur ganzzahlige Ecken.

(c) Für jedes Paar von Vektoren $b \in \mathbb{Z}^m$, $u \in \mathbb{Z}^n$ besitzt das Polyeder

$$P_{\text{KFB}} \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, A\,x \le b,\ x \ge 0,\ x \le u\}$$

nur ganzzahlige Ecken.

Hausaufgabe 8.3 (Zuordnungsproblem) 11 Punkte

In einem Impfzentrum sind k Termine frei, für die sich l InteressentInnen gemeldet haben. An jedem Termin kann höchstens eine Person geimpft werden, jede Person darf höchstens einmal geimpft werden. Für jede/n der InteressentInnen ist bei der Voranmeldung erhoben worden, welcher der Termine wahrgenommen werden kann. Ziel ist, möglichst vielen Personen einen wahrnehmbaren Termin zuzuteilen.

(i) Formulieren Sie ein LP, anhand dessen optimaler Basisvektoren Sie optimale Zuordnungen von InteressentInnen zu Terminen ablesen können und erklären Sie, warum das möglich ist und wie sie das Problem lösen können.

(ii) Das Personal im Zentrum wurde verdoppelt, an jedem Termin können nun 2 Personen bedient werden. Wie müssen Sie ihr LP modifizieren, um diese Änderung zu modellieren?

(iii) Jede Person, die geimpft wird, muss nun zweimal geimpft werden, wobei der Abstand zwischen den beiden Impfungen mindestens 14 Tage betragen muss. Wie können Sie ihr Vorgehen anpassen, um diese Änderung abzudecken?

Hausaufgabe 8.4 4 Punkte

Es sei ein LP in Normalform gegeben, wobei $A \in \mathbb{Z}^{m\times n}$ total unimodular ist und $b \in \mathbb{Z}^m$, $c \in \mathbb{Z}^n$. Zeigen Sie, dass das primale Polyeder und das duale Polyeder nur ganzzahlige Ecken haben.

Es ist keine Abgabe Ihrer Lösungen zu diesem Übungsblatt vorgesehen.