R. Herzog, G. Müller, M. Hashemi
Universität Heidelberg



# Übung 4

Ausgabedatum: 8. November 2022

**Hausaufgabe 4.1** (Überführen auf Normalform) 4 Punkte

Gegeben sei die lineare Optimierungsaufgabe

$$\begin{aligned} \text{Maximiere} \quad & -2\,x_1 - 3\,x_2 - 4\,x_3 \quad \text{über } x \in \mathbb{R}^3 \\ \text{sodass} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \le 4 \\ & 3\,x_2 + x_3 \le 6 \\ & x_1 \le 2 \\ & x_3 \le 3 \end{aligned}$$

Überführen Sie das lineare Optimierungsproblem in ein äquivalentes Problem in Normalform.

**Hausaufgabe 4.2** (Zusammenhang von Ecken/Extremalpunkten und zulässigen Basisvektoren) 5 Punkte

Es sei $P$ wie in (6.8) ein Polyeder in Normalform, und es gelte $\operatorname{Rang}(A) = m$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

$(i)$ $x \in \mathbb{R}^n$ ist eine Ecke/ein Extremalpunkt von $P$.

$(ii)$ $x \in \mathbb{R}^n$ ist zulässiger Basisvektor von $P$.

$(iii)$ es existiert ein Kostenvektor $c \in \mathbb{R}^n$, sodass $x \in \mathbb{R}^n$ die einzige Optimallösung des Problems

$$\begin{aligned} \text{Minimiere } c^\intercal x \quad &\text{über } x \in \mathbb{R}^n \\ \text{sodass } Ax = b& \\ \text{und } x \geq 0& \end{aligned}$$

ist.

**Beachte:** Die Äquivalenz von Aussagen $(i)$ und $(ii)$ ist genau die Aussage von Satz 6.16 aus dem Skript.

**Hausaufgabe 4.3** (Beziehungen zwischen den Polyederdarstellungen) 21 Punkte

In Lemma 6.3 heißt es, dass jedes LP "äquivalent" zu einem LP in kanonischer Form ist. In dieser Aufgabe wollen wir genauer ausarbeiten, was für eine Form von Äquivalenz dabei gemeint ist. Dafür untersuchen wir den Zusammenhang zwischen den von uns verwendeten Polyederdarstellungen, ihren Ecken und den dazugehörigen LPs. Gegeben seien dafür eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, ein Vektor $b \in \mathbb{R}^m$ und ein Vektor $c \in \mathbb{R}^n$. Wir definieren die drei von uns verwendeten Mengendarstellungen

$$\begin{aligned} P_{\text{HS}} &:= \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\} \quad \text{(Halbebenenschnitte)} \\ P_{\text{CF}} &:= \left\{(x^+, x^-) \in \mathbb{R}^{2n} \;\middle|\; [A, -A] \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \end{pmatrix} \leq b,\ (x^+, x^-) \geq 0 \right\} \quad \text{(Kanonische Form)} \\ P_{\text{NF}} &:= \left\{(x^+, x^-, s) \in \mathbb{R}^{2n+m} \;\middle|\; [A, -A, \text{Id}_m] \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \\ s \end{pmatrix} = b,\ (x^+, x^-, s) \geq 0 \right\} \quad \text{(Normalform)} \end{aligned}$$

und damit die dazugehörigen linearen Programme

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & c^\intercal x \quad \text{über } x \in \mathbb{R}^n \\ \text{sodass} \quad & x \in P, \end{aligned} \tag{$\text{LP}_{\text{HS}}$}$$

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & c^\intercal x^+ - c^\intercal x^- \quad \text{über } (x^+, x^-) \in \mathbb{R}^{2n} \\ \text{sodass} \quad & (x^+, x^-) \in P_{\text{CF}}, \end{aligned} \tag{$\text{LP}_{\text{CF}}$}$$

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & c^\intercal x^+ - c^\intercal x^- \quad \text{über } (x^+, x^-, s) \in \mathbb{R}^{2n+m} \\ \text{sodass} \quad & (x^+, x^-, s) \in P_{\text{NF}}. \end{aligned} \tag{$\text{LP}_{\text{NF}}$}$$

Weiterhin fixieren wir die Abbildungen

$$
\begin{aligned}
T_{\mathrm{HS}}^{\mathrm{CF}} &: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{2n}, & T_{\mathrm{HS}}^{\mathrm{CF}}(x) &:= (\max(x,0), \max(-x,0)), \\
T_{\mathrm{CF}}^{\mathrm{HS}} &: \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{n}, & T_{\mathrm{CF}}^{\mathrm{HS}}(x^+,x^-) &:= x^+ - x^-, \\
T_{\mathrm{CF}}^{\mathrm{NF}} &: \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n+m}, & T_{\mathrm{CF}}^{\mathrm{NF}}(x^+,x^-) &:= \left(x^+, x^-, b - [A, -A]\begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \end{pmatrix}\right), \\
T_{\mathrm{NF}}^{\mathrm{CF}} &: \mathbb{R}^{2n+m} \to \mathbb{R}^{2n}, & T_{\mathrm{NF}}^{\mathrm{CF}}(x^+,x^-,s) &:= (x^+,x^-),
\end{aligned}
\tag{0.1}
$$

welche die Polyederdarstellungen aufeinander abbilden sollen.

Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(*i*) Die Abbildung $T_{\mathrm{HS}}^{\mathrm{CF}}$ ist injektiv und die Abbildung $T_{\mathrm{CF}}^{\mathrm{HS}}$ ist nicht injektiv, denn es gilt

$$
\begin{aligned}
T_{\mathrm{CF}}^{\mathrm{HS}}\left(T_{\mathrm{HS}}^{\mathrm{CF}}(x)\right) &= x \\
{T_{\mathrm{CF}}^{\mathrm{HS}}}^{-1}(\{x\}) &= T_{\mathrm{HS}}^{\mathrm{CF}}(x) + \{(\delta x, \delta x) \in \mathbb{R}^{2n} \mid \delta x \in \mathbb{R}^n\}
\end{aligned}
$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

**Beachte:** Jetzt wissen wir, wie der Kern der "Rekombinationsabbildung" $T_{\mathrm{CF}}^{\mathrm{HS}}$ aussieht.

(*ii*) Die Abbildung $T_{\mathrm{CF}}^{\mathrm{NF}}$ und die Einschränkung der Abbildung $T_{\mathrm{NF}}^{\mathrm{CF}}$ auf $P_{\mathrm{NF}}$ sind injektiv, denn es gilt

$$
\begin{aligned}
T_{\mathrm{NF}}^{\mathrm{CF}}(T_{\mathrm{CF}}^{\mathrm{NF}}(x^+,x^-)) &= (x^+,x^-) \qquad \text{für alle } (x^+,x^-) \in \mathbb{R}^{2n}, \\
T_{\mathrm{CF}}^{\mathrm{NF}}(T_{\mathrm{NF}}^{\mathrm{CF}}(x^+,x^-,s)) &= (x^+,x^-,s) \qquad \text{für alle } (x^+,x^-,s) \in P_{\mathrm{NF}}.
\end{aligned}
$$

**Beachte:** Jetzt wissen wir, dass der Kern von "$T_{\mathrm{NF}}^{\mathrm{CF}}$" auf $P_{\mathrm{NF}}$ keine Probleme machen dürfte.

(*iii*) $P_{\mathrm{CF}} = T_{\mathrm{HS}}^{\mathrm{CF}}(P_{\mathrm{HS}}) + \{(\delta x, \delta x) \in \mathbb{R}^{2n} \mid \delta x \geq 0\}$ und $P_{\mathrm{HS}} = T_{\mathrm{CF}}^{\mathrm{HS}}(P_{\mathrm{CF}})$.

**Beachte:** Jetzt wissen wir, dass $P_{\mathrm{CF}}$ genau aus den Bildern von $P_{\mathrm{HS}}$ unter der Splitabbildung jeweils ergänzt um den gesamten Kern von $T_{\mathrm{CF}}^{\mathrm{HS}}$ besteht.

(*iv*) $T_{\mathrm{CF}}^{\mathrm{NF}}(P_{\mathrm{CF}}) = P_{\mathrm{NF}}$ und $T_{\mathrm{NF}}^{\mathrm{CF}}(P_{\mathrm{NF}}) = P_{\mathrm{CF}}$.

**Beachte:** Jetzt wissen wir, dass $P_{\mathrm{CF}}$ und $P_{\mathrm{NF}}$ von unseren Abbildungen bijektiv ineinander überführt werden.

Wir bezeichnen im Folgenden die Mengen der Ecken und Optimierer der jeweiligen Polyeder $P_{\text{HS}}$, $P_{\text{CF}}$ und $P_{\text{NF}}$ mit $V_{\text{HS}}$, $V_{\text{CF}}$ und $V_{\text{NF}}$ bzw. $O_{\text{HS}}$, $O_{\text{CF}}$ und $O_{\text{NF}}$. Zeigen Sie weiter:

(*v*) $T_{\text{HS}}^{\text{CF}}(V_{\text{HS}}) \subseteq V_{\text{CF}} \subseteq T_{\text{HS}}^{\text{CF}}(P_{\text{HS}})$.

**Beachte:** Jetzt wissen wir, dass die Ecken aus $P_{\text{HS}}$ auf Ecken in $P_{\text{CF}}$ abgebildet werden, aber dass potentiell noch weitere Punkte Ecken in $P_{\text{CF}}$ sind. Diese haben allerdings alle auch Urbilder in $P_{\text{HS}}$.

(*vi*) I. A. ist $V_{\text{CF}} \setminus T_{\text{HS}}^{\text{CF}}(V_{\text{HS}}) \neq \emptyset$.

**Beachte:** Hier sehen wir, dass bei der Transformation von $P_{\text{HS}}$ zu $P_{\text{CF}}$ tatsächlich Ecken dazukommen können.

(*vii*) $V_{\text{NF}} = T_{\text{CF}}^{\text{NF}}(V_{\text{CF}})$ und $V_{\text{CF}} = T_{\text{NF}}^{\text{CF}}(V_{\text{NF}})$.

**Beachte:** Jetzt wissen wir, dass auch die Ecken aus $P_{\text{CF}}$ und $P_{\text{NF}}$ bijektiv ineinander abgebildet werden.

(*viii*) $O_{\text{CF}} = T_{\text{HS}}^{\text{CF}}(O_{\text{HS}}) + \{(\delta x, \delta x) \in \mathbb{R}^{2n} \mid \delta x \geq 0\}$ und $O_{\text{HS}} = T_{\text{CF}}^{\text{HS}}(O_{\text{CF}})$.

**Beachte:** Jetzt wissen wir, dass bei der Transformation von $\text{LP}_{\text{HS}}$ zu $\text{LP}_{\text{CF}}$ Optimierer hinzukommen werden. Bei Rücktransformation erhalten wir allerdings aus jedem der Optimierer aus der kanonischen Form einen Optimierer des ursprünglichen Problems.

(*ix*) $O_{\text{NF}} = T_{\text{CF}}^{\text{NF}}(O_{\text{CF}})$ und $O_{\text{CF}} = T_{\text{NF}}^{\text{CF}}(O_{\text{NF}})$.

**Beachte:** Jetzt wissen wir, dass die Optimierer von $\text{LP}_{\text{CF}}$ und $\text{LP}_{\text{NF}}$ bijektiv ineinander abgebildet werden.

(*x*) $T_{\text{HS}}^{\text{CF}}(V_{\text{HS}} \cap O_{\text{HS}}) \subseteq V_{\text{CF}} \cap O_{\text{CF}} \subseteq T_{\text{HS}}^{\text{CF}}(O_{\text{HS}})$.

**Beachte:** Bei der Transformation von $\text{LP}_{\text{HS}}$ nach $\text{LP}_{\text{CF}}$ können weitere optimale Ecken entstehen. Diese liegen aber im Bild der Optimierer unter $T_{\text{HS}}^{\text{CF}}$.

(*xi*) I. A. ist $(V_{\text{CF}} \cap O_{\text{CF}}) \setminus T_{\text{HS}}^{\text{CF}}(V_{\text{HS}} \cap O_{\text{HS}}) \neq \emptyset$.

**Beachte:** Die zusätzlichen optimalen Ecken entstehen also tatsächlich.

(*xii*) $O_{\text{NF}} \cap V_{\text{NF}} = T_{\text{CF}}^{\text{NF}}(O_{\text{CF}} \cap V_{\text{CF}})$ und $O_{\text{CF}} \cap V_{\text{CF}} = T_{\text{NF}}^{\text{CF}}(O_{\text{NF}} \cap V_{\text{NF}})$.

**Beachte:** Die optimalen Ecken der Probleme in kanonischer- und Normalform werden bijektiv ineinander überführt.

Wir sehen also: Die Normalform und die kanonische Form sind wirklich komplett gleichwertig. Alle Klassen interessanter Punkte werden bijektiv ineinander überführt. Bei der Transformation von der Halbebenenschnittform in kanonische Form können wir immer Punkte aus einer der Polyedermengen in die jeweils andere Menge abbilden, eindeutig ist das aber nicht mehr. Außerdem kommen sowohl Ecken als auch Optimierer und optimale Ecken bei der Transformation in kanonische Form dazu. Kritisch ist hierbei, dass Ecken dazu kommen, die bei Rücktransformation auf nicht-Ecken abgebildet werden. Wir können also die Optimierer als gleichwertig betrachten, nicht aber optimale Ecken.

**Hausaufgabe 4.4** (Innerste Punkte eines Polyeders) 7 Punkte

Es sei ein Polyeder $P$ (also der Schnitt von $m$ Halbräumen) gegeben und mit $a_i \in \mathbb{R}^n$ und $b_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, \ldots, m\}$ durch

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i^\mathsf{T} x \le b_i,\ i = 1, \ldots, m\}$$

beschrieben. Für jeden Punkt $x \in P$ untersuchen wir den größtmöglichen Radius $r(x)$, so dass die abgeschlossene Kugel mit Mittelpunkt $x$ und Radius $r(x)$ noch vollständig im Polyeder $P$ liegt. Ein Maximierer von $r(x)$ über $P$ heißt **Tschebyschow-Zentrum** oder **innerster Punkt** von $P$. Ein solcher Punkt hat also den größtmöglichen Abstand zu den Seitenflächen des Polyeders.

$(i)$ Formulieren Sie die Aufgabe, ein Tschebyschow-Zentrum des Polyeders $P$ zu finden, als ein lineares Optimierungsproblem in Normalform.

$(ii)$ Zeigen Sie, dass jedes beschränkte, nichtleere Polyeder ein Tschebyschow-Zentrum mit endlichem Kugelradius besitzt.

$(iii)$ Geben Sie ein Polyeder an, das unendlich viele Tschebyschow-Zentren mit endlichem Kugelradius besitzt.

$(iv)$ Geben Sie ein nichtleeres Polyeder an, das kein Tschebyschow-Zentrum besitzt.

Es ist keine Abgabe Ihrer Lösungen zu diesem Übungsblatt vorgesehen.