R. Herzog, G. Müller, M. Hashemi
Universität Heidelberg

Übung 3

Ausgabedatum: 2. November 2022

Hausaufgabe 3.1 (Stabilität der Q-Konvergenzordnungen bei Normwechsel) 10 Punkte

(i) Es seien zwei äquivalente Normen $\|\cdot\|_a$, $\|\cdot\|_b\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ gegeben. Zeigen Sie, dass aus der Q-superlinearen bzw. Q-quadratischen Konvergenz einer Folge bzgl. $\|\cdot\|_a$ schon die Q-superlineare bzw. Q-quadratische Konvergenz bzgl. $\|\cdot\|_b$ folgt.

(ii) Überlegen Sie sich, warum die Argumente für den Nachweis der Aussage in Punkt (i) für Q-*lineare* Konvergenz nicht funktionieren, und geben Sie ein Gegenbeispiel an, das zeigt, dass eine entsprechende Aussage für Q-*lineare* Konvergenz i. A. nicht gilt.

Hausaufgabe 3.2 (Langsame Konvergenz des Newton-Verfahrens zur Nullstellensuche) 4 Punkte

Wir wollen ausgehend vom Startpunkt $x^{(0)} = 1$ die Nullstelle der Funktion

$$f(x) = x^2$$

mit dem Newton-Verfahren bestimmen. Berechnen Sie die Iterierten, untersuchen Sie deren Konvergenz und ordnen Sie im Fall von Konvergenz der Folge den passenden Konvergenzbegriff zu. Warum ist das beobachtete Verhalten kein Widerspruch zu Satz 5.8?

Hausaufgabe 3.3 (Nichtkonvergenz des lokalen Newton-Verfahrens in der Optimierung) 6 Punkte

Wir betrachten das lokale Newton-Verfahren (Algorithmus 5.1) zur Minimierung der Funktion $f(x) = \cos(x)$ (durch Anwendung auf die notwendigen Bedingungen erster Ordnung). Da die zweite Ableitung an den stationären Punkten nicht null ist, wissen wir, dass das Verfahren Q-quadratisch gegen einen stationären Punkt konvergiert, wenn man nur nah genug an diesem startet. Was schiefgehen kann, wenn man das nicht tut, wollen wir hier untersuchen.

(i) Bestimmen Sie einen Startpunkt $x^{(0)}$, so dass die Folge der Iterationspunkte $x^{(k)}$ bestimmt gegen ∞ divergiert.

(ii) Bestimmen Sie einen Startpunkt $x^{(0)}$, sodass die Folge der Iterationspunkte zwischen zwei verschiedenen (nicht optimalen) Punkten alterniert.

Hausaufgabe 3.4 (Affine Invarianz des Newton-Verfahrens) 10 Punkte

Wir wollen die (affine) Invarianz des lokalen Newton-Verfahrens zur Lösung von Gleichungen der Form $F(x) = 0$ mit stetig differenzierbarem $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ (Algorithmus 5.1) untersuchen.

Es seien dafür $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ regulär und $b \in \mathbb{R}^n$ gegeben, und $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine vom Newton-Verfahren zum Startpunkt $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ erzeugte Folge von Iterierten. Zeigen Sie:

(i) Das Newton-Verfahren für die Funktion

$$G\colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n, \quad G(y) \coloneqq F(Ay + b)$$

zum Startpunkt $y^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ mit $x^{(0)} = Ay^{(0)} + b$ ist wohldefiniert und für die erzeugte Folge $(y^{(k)})_{k\in\mathbb{N}_0}$ von Iterierten gilt

$$x^{(k)} = Ay^{(k)} + b.$$

(ii) Für die vom Newton-Verfahren für die Funktion

$$H\colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n, \quad H(y) \coloneqq AF(y)$$

zum Startpunkt $y^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ mit $x^{(0)} = y^{(0)}$ ist wohldefiniert und für die erzeugte Folge $(y^{(k)})_{k\in\mathbb{N}_0}$ von Iterierten gilt

$$x^{(k)} = y^{(k)}.$$

(iii) Erläutern Sie (intuitiv, nicht notwendigerweise mit Rechnungen oder Beispielen) was wir erwarten können, wenn wir die Transformation in Punkt (ii) um eine konstante Verschiebung auf

$$H\colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n, \quad H(y) \coloneqq AF(y) + b$$

erweitert wird.

Hausaufgabe 3.5 (Zur Einschränkung $\sigma \in (0, \frac{1}{2})$ und quadratischer Konvergenz) 7 Punkte

Im globalisierten Newton-Verfahren (Algorithmus 5.11) aus der Vorlesung wird der Armijo-Schrittweitenparameter σ auf $\sigma \in (0, \frac{1}{2})$ eingeschränkt, damit im Laufe des Algorithmus die volle Schrittweite $t^{(k)} = 1$ für $k \geq k_0$ gewählt werden kann und das globalisierte Verfahren in das lokale Verfahren übergeht. Wir wollen diesen Zusammenhang untersuchen.

(i) Zeigen Sie, dass die Schrittweite $t^{(k)} = 1$ in Schritt k mit Newton-Schritt $d^{(k)} \neq 0$ für die quadratische Funktion

$$f(x) = \frac{1}{2}x^\intercal Qx + c^\intercal x + \gamma$$

mit symmetrischer, positiv definiter Matrix $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $c \in \mathbb{R}^n$, und $\gamma \in \mathbb{R}$ genau dann akzeptiert wird, wenn $\sigma \leq \frac{1}{2}$ ist.

(ii) Erläutern Sie (intuitiv, nicht notwendigerweise mit Rechnungen oder Beispielen), warum die Einschränkung auf $\sigma < \frac{1}{2}$ für allgemeine (nichtquadratische) Funktionen benötigt wird.

Es ist keine Abgabe Ihrer Lösungen zu diesem Übungsblatt vorgesehen.