R. Herzog, G. Müller, M. Hashemi
Universität Heidelberg

Übung 1

Ausgabedatum: 18. Oktober 2022

Hausaufgabe 1.1 (Klassifikation von Optimierungsaufgaben) 17 Punkte

Entscheiden Sie für jede der folgenden Aufgaben (i)–$(viii)$,

(a) ob es sich um eine *diskrete* oder *kontinuierliche* Optimierungsaufgabe handelt

(b) und ob die Aufgabe unrestringiert oder gleichungs-, ungleichungsbeschränkt oder beides ist,

(c) unzulässig oder unbeschränkt ist oder endlichen Optimalwert hat,

(d) linear oder quadratisch oder keines von beiden ist.

Begründen Sie Ihre Antworten.

(i)

$$\text{Minimiere} \quad -5x_1 - 7x_2 \quad \text{über } x \in \mathbb{R}^2$$
$$\text{sodass} \quad \begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le 30 \\ -2x_1 + x_2 \le 12 \\ -x_1 \le 0 \\ -x_2 \le 0 \end{cases}$$

(ii)

$$\text{Minimiere} \quad 3x_1 + x_2 \quad \text{über } x \in \mathbb{Z}^2$$
$$\text{sodass} \quad \begin{cases} -x_1 + x_2 \le -2 \\ -2x_1 + x_2 \le 4 \\ -x_1 \le 0 \\ -x_2 \le 0 \end{cases}$$

(iii)

$$\text{Minimiere} \quad \|Ax - b\|^2 \quad \text{über } x \in \mathbb{R}^n$$

Dabei ist $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $m \ge n$ und $b \in \mathbb{R}^m$.

(iv)

$$\text{Minimiere} \quad 49 - x_1^2 - x_2^2 \quad \text{über } x \in \mathbb{R}^2$$
$$\text{sodass} \quad \begin{cases} -x_1 \le 0 \\ -x_2 \le 0 \end{cases}$$
$$\text{und} \quad x_1 + 3x_2 = 10$$

(*v*)

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & x_1 + x_2 \quad \text{über } x \in \mathbb{Z}^2 \\ \text{sodass} \quad & \begin{cases} -x_1 \le 0 \\ -x_2 \le 0 \end{cases} \\ \text{und} \quad & x_1^2 + x_2^2 - 2 = 0 \end{aligned}$$

(*vi*)

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & -3x_1 \quad \text{über } x \in \mathbb{R}^2 \\ \text{sodass} \quad & \begin{cases} -x_1^2 - x_2 \le 0 \\ x_1^2 + x_2^2 \le 4 \\ -x_1 \le 0 \\ -x_2 \le 0 \end{cases} \end{aligned}$$

(*vii*)

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & 2x_1x_2 \quad \text{über } x \in \mathbb{R}^2 \\ \text{sodass} \quad & \begin{cases} (x_1+1)^2 + x_2^2 \le \frac{1}{2} \\ -x_1 \le 0 \\ -x_2 \le 0 \end{cases} \\ \text{und} \quad & (x_1 - 1)^2 + x_2^2 = 1 \end{aligned}$$

(*viii*)

$$\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & \exp(x_1^2 + x_2^2) \quad \text{über } x \in \mathbb{R}^2 \\ \text{sodass} \quad & -x_1^2 - x_2^2 \le -18 \\ \text{und} \quad & (x_1 - 3)(x_1 + 3) = 0 \end{aligned}$$

Hausaufgabe 1.2 (Untersuchung von Optimalstellen) 17 Punkte

Bestimmen Sie für die unten stehenden Minimierungsaufgaben sämtliche stationären Punkte und entscheiden Sie, ob es sich um Extrempunkte handelt und ob diese lokal, global und strikt bzw. nicht strikt sind. Begründen Sie Ihre Antworten.

(*i*)

$$\text{Minimiere} \quad f(x) \coloneqq 3x^3 + 26x^2 - 12x + 5 \quad \text{über } x \in \mathbb{R}$$

(*ii*)

$$\text{Minimiere} \quad f(x) \coloneqq x_1^4 + x_2^4 - 4x_1x_2 \quad \text{über } x = (x_1, x_2)^\intercal \in \mathbb{R}^2$$

Hausaufgabe 1.3 (Stabilität der Minimiereigenschaft bei Konkatenation) 11 Punkte

Es seien $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $F \subseteq \mathbb{R}$ und $W = f(F) \coloneqq \{f(x) \mid x \in F\}$ die Wertemenge von f über F. Es sei $g\colon W \to \mathbb{R}$ eine weitere Funktion. Wir betrachten die beiden Aufgaben

$$\text{Minimiere} \quad f(x) \quad \text{über } x \in F \tag{$*$}$$

und

$$\text{Minimiere} \quad g(f(x)) \quad \text{über } x \in F. \tag{$**$}$$

(*i*) Beweisen Sie die folgende Aussage: Ist g auf der Menge W monoton wachsend, dann ist jeder lokale Minimierer von ($*$) auch ein lokaler Minimierer von ($**$).

(*ii*) Zeigen Sie anhand eines Gegenbeispiels, dass auf die Monotonie von g in Punkt (*i*) nicht verzichtet werden kann.

(*iii*) Zeigen Sie anhand eines Gegenbeispiels, dass unter den Voraussetzungen in Punkt (*i*) die Aufgabe ($**$) lokale Minimierer besitzen kann, die keine lokalen Minimierer von ($*$) sind. Finden Sie dann eine zusätzliche Voraussetzung an g, unter der beide Aufgaben genau dieselben lokalen Minimierer besitzen, und beweisen Sie diese Aussage.

Hausaufgabe 1.4 (Notwendige Bedingungen zweiter Ordnung sind nicht hinreichend) 10 Punkte

Wir betrachten die Optimierungsaufgabe

$$\text{Minimiere} \quad f(x) = \left(x_1 - x_2^2\right)\left(2x_1 - x_2^2\right) = 2x_1^2 - 3x_1x_2^2 + x_2^4 \quad \text{über } x \in \mathbb{R}^2.$$

(*i*) Zeigen Sie, dass die notwendigen Optimalitätsbedingungen erster und zweiter Ordnung im Punkt $(0,0)^\top$ erfüllt sind.

(*ii*) Zeigen Sie, dass der Punkt $(0,0)^\top$ ein lokaler Minimierer von f entlang jeder geraden Linie durch den Ursprung ist.

(*iii*) Zeigen Sie, dass der Punkt $(0,0)^\top$ *kein* lokaler Minimierer von f ist.

Hausaufgabe 1.5 (Stetige Abhängigkeit der Eigenwerte von den Matrixeinträgen) 7 Punkte

Für symmetrische Matrizen $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ bezeichne $\lambda_1(M) \le \lambda_2(M) \le \cdots \le \lambda_n(M)$ die aufsteigend sortierten Eigenwerte von M und

$$\|M\|_2 \coloneqq \max_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\\ \|x\|_2=1}} \|Mx\|_2 = \max\{|\lambda_1(M)|,\ |\lambda_n(M)|\}$$

die *Spektralnorm*. Beweisen Sie den folgenden

Satz. *Für symmetrische Matrizen $A, E \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt:*

$$|\lambda_k(A+E) - \lambda_k(A)| \le \|E\|_2 \quad \textit{für alle } k \in \{1,\dots,n\}.$$

Beachte: Daraus folgt insbesondere, dass die Eigenwerte von A stetig von den Einträgen abhängen.

Hinweis: Zeigen Sie zuerst

$$\lambda_k(A) + \lambda_1(E) \le \lambda_k(A+E) \le \lambda_k(A) + \lambda_n(E)$$

mit Hilfe des *Minimax-Theorems* von Courant-Fischer. Dieses besagt, dass für symmetrische Matrizen A gilt:

$$\lambda_k(A) = \min_{\substack{U \text{ Unterraum} \\ \dim U = k}} \max_{\substack{x \in U \\ \|x\|=1}} x^\mathsf{T} A\, x = \max_{\substack{U \text{ Unterraum} \\ \dim U = n-k+1}} \min_{\substack{x \in U \\ \|x\|=1}} x^\mathsf{T} A\, x.$$

Es ist keine Abgabe Ihrer Lösungen zu diesem Übungsblatt vorgesehen.