Anmerkung zu diesem Dokument

Für die Vorbereitung auf die Abschlussprüfung möchten wir Ihnen gern zusätzliches Material zur Verfügung stellen. Unten stehend finden Sie zu diesem Zweck einige Aufgaben, deren Bearbeitung Sie in Ihre Vorbereitung einbeziehen können. Ein paar Bemerkungen zu diesem Dokument sind aber notwendig.

- Das Layout dieses Dokuments entspricht ab der nächsten Seite dem derzeitigen Layout der Klausur, damit Sie sich an das Format gewöhnen können.

- Die Bearbeitung der unten stehenden Aufgaben durch Sie ist freiwillig. Die Aufgaben werden weder abgegeben, korrigiert noch bewertet.

- Wenn Sie möchten, dann erhalten Sie in den Übungsgruppen der letzten Woche (Woche 13) Hilfestellung beim Bearbeiten der Aufgaben. Wir empfehlen aber, dass Sie sich vorher in einem ruhigen Kontext *allein* und ohne Unterbrechung mit den Aufgaben beschäftigen. Die Lösungen werden wir vsl. am 20.07.2022 veröffentlichen.

- Die unten stehenden Aufgaben sollen Ihnen Aufschluss darüber geben, welchen Stil die Klausuraufgaben haben werden. Jede der Aufgaben in diesem Dokument ist mit dem Ziel entworfen worden, eine geeignete Klausuraufgabe zu erhalten.

- Wir vermeiden bewusst den Term “Probeklausur” für diese Zusammenstellung von Aufgaben, denn sie lässt nur bedingt Schlüsse auf Umfang und Schwierigkeitsgrad der Klausur zu.

- Schenken Sie den Punktzahlen in den Aufgaben nicht zu viel Beachtung. Die Aufgaben wurden ohne Rücksicht auf ihre Rolle in der Aufgabenzusammenstellung beispielhaft bepunktet. Die Aufgaben sind untereinander entsprechend eventuell nicht korrekt gewichtet.

Klausurvorbereitung

18. Juli 2022

Name:	Vorname:
Matrikelnummer:	

- Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.
- Schalten Sie alle elektronischen Geräte stumm und entfernen Sie sie vom Platz.
- Legen Sie Ihren Studierendenausweis vor sich an den Platz.
- Schreiben Sie nicht mit Bleistift oder mit roter Farbe.
- Begründen Sie Ihre Antworten!
- Verwenden Sie für Ihre Lösung den Platz unter der jeweiligen Aufgabenstellung. Zusätzliche leere Seiten finden Sie hinter der letzten Aufgabe.
- Sollten Sie weiteres Papier benötigen, dann heben Sie die Hand, wir bringen es an den Platz. Schreiben Sie auf jedes zusätzlich verwendete Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer.
- Bei Täuschungsversuchen wird Ihre Prüfung mit “nicht bestanden” bewertet.

1 (3 P.)	2 (2 P.)	3 (2 P.)	4 (4 P.)	5 (5 P.)	6 (2 P.)	7 (3 P.)	8 (6 P.)	9 (6 P.)	Σ (33 P.)

Aufgabe 1. 3 Punkt(e)

Es sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit Singulärwertzerlegung $A = U\Sigma V^\intercal$ gegeben.

(i) Geben Sie die Dimensionen der Matrizen $U, \Sigma, V^\intercal$ an und beschreiben Sie kurz die Rollen der Matrizen in der Zerlegung.

(ii) Erläutern Sie die Struktur der Matrix Σ für die Fälle $m < n$, $m = n$ und $m > n$.

(iii) Erklären Sie, wie man in der Singulärwertzerlegung den Rang von A erkennen kann.

Lösung.

Aufgabe 2. 2 Punkt(e)

Gegeben sei $x \in \mathbb{R}$, eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und ein mit Maschinenoperationen realisiertes Verfahren $\widehat{f}$ für deren Auswertung. Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage:

Wenn $\widehat{f}(x) \notin \operatorname{image}(f)$[1], dann kann $\widehat{f}$ nicht rückwärtsstabil an x sein.

Lösung.

[1]Das Bild einer Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (kurz $\operatorname{image}(f)$) ist definiert als die Menge $\{f(x) \mid x \in \mathbb{R}\}$

Aufgabe 3. 2 Punkt(e)

Es sei eine reguläre Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}$ mit LR-Zerlegung

$$PA = LR$$

gegeben.

Leiten Sie eine Zerlegung der Matrix $-A$ her.

Lösung.

Aufgabe 4. 4 Punkt(e)

Es seien $n \in \mathbb{N}$, eine reguläre Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $b \in \mathbb{R}^n$ gegeben.

(i) Geben Sie an, was man unter einer LR-Zerlegung mit Spaltenpivotisierung der Matrix A versteht und welche Struktur die auftrenden Matrizen haben.

(ii) Erklären Sie, wie eine vorliegende LR-Zerlegung mit Spaltenpivotisierung von A zum Lösen eines Gleichungssystems der Form

$$Ax = b$$

genutzt werden kann.

(iii) Erklären Sie, wie eine vorliegende LR-Zerlegung mit Spaltenpivotisierung von A zum Lösen eines Gleichungssystems der Form

$$A^2x = b$$

genutzt werden kann.

Lösung.

Aufgabe 5. 5 Punkt(e)

Gegeben sei das double-precision Fließkommasystem $\mathbb{F}$. Weiterhin sei die Matrix

$$A := \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

aus $\mathbb{R}^{2\times 2}$ sowie $x \in \mathbb{R}^2$ und $b \in \mathbb{F}^2$ gegeben, so dass $Ax = b$ ist.

Entscheiden Sie, welche Zeilenpermutation mit dazugehöriger Permutationsmatrix P für die Bestimmung von x über das Lösen des permutierten Systems

$$PA = Pb$$

mittels LR-Zerlegung und Vorwärts- und Rückwärtssubstitution in $\mathbb{F}$ das stabilste Verfahren liefert.

Lösung.

Aufgabe 6. 2 Punkt(e)

Es seien $n \geqslant 0$, Stützstellen $x_0, \dots, x_n$ mit Werten $y_0, \dots, y_n$ aus $\mathbb{R}$ und das dazugehörige Interpolationspolynom $p \in P_n$ gegeben, dessen Koeffizienten bzgl. der Newton-Basis über dividierte Differenzen berechnet wurden.

Bestimmen Sie die Anzahl der Gleitkommaoperationen, die nötig sind, um die Koeffizienten des Interpolationspolynoms zu den bisherigen Stützstellen/Werten und einem zusätzlichen Paar (x_{n+1}, y_{n+1}) bzgl. Newton-Basis über dividierte Differenzen zu berechnen.

Lösung.

Aufgabe 7. 3 Punkt(e)

Es sei das Polynom $p(x) = 1 + 34x^{17} + 17x^{34}$ für $x \in \mathbb{R}$ gegeben.

Bestimmen Sie eine möglichst kleine obere Schranken an die mindestens benötigte Anzahl von paarweise verschiedenen Stützpunkten, so dass p exakt

(i) durch das Interpolationspolynom bzgl. der Lagrange-Basis dargestellt werden kann;

(ii) mit Gauß-Quadratur integriert werden kann;

(iii) mit abgeschlossenen Newton-Cotes-Formeln integriert werden kann.

Lösung.

Aufgabe 8. 6 Punkt(e)

Sie wollen numerisch Nullstellen der drei stetigen Funktionen

$$f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} \sin(x_1) \\ x_2^2 - 1 \end{pmatrix}, \qquad g(x) = \begin{cases} \sin(x)\ln(|x|), & x \neq 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \qquad h(x) = \begin{pmatrix} 0.999\ln(\|x\|_2 + 1) - x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$$

bestimmen. Dafür sollen Sie das Bisektionsverfahren, die Banachsche Fixpunktiteration und das (lokale) Newton-Verfahren jeweils genau einmal verwenden. Erklären Sie, welche Funktion Sie mit welchem Verfahren behandeln müssen.

Lösung.

Aufgabe 9. 6 Punkt(e)

Es sei ein festes $n \in \mathbb{N}$ und ein Polynom $p \in P_n$ gegeben. Wir definieren die stetige Funktion f durch

$$f(x) \coloneqq p(x) + \sin(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie, für welche Werte von $b > 0$ das Polynom p die Aufgabe

$$\text{Minimiere} \quad \|f - p\|_{C([0,b])}, \quad p \in P_n$$

löst.

Lösung.

Diese Seite können Sie für Nebenrechnungen und Fortsetzungen längerer Antworten verwenden. Bitte versehen Sie die ihre Rechnungen mit den dazugehörigen Aufgabennummern.

Nebenrechnungen Seite 1.

Diese Seite können Sie für Nebenrechnungen und Fortsetzungen längerer Antworten verwenden. Bitte versehen Sie die ihre Rechnungen mit den dazugehörigen Aufgabennummern.

Nebenrechnungen Seite 2.

Diese Seite können Sie für Nebenrechnungen und Fortsetzungen längerer Antworten verwenden. Bitte versehen Sie die ihre Rechnungen mit den dazugehörigen Aufgabennummern.

Nebenrechnungen Seite 3.