Plenum 11

Einführung in die Numerik
Sommersemester 2022

05.07.2022 und 07.07.2022

Numerische Integration

Klausur

- am 26.07.2022 im großen Hörsaal des Hörsaalzentrums Chemie (INF 252)
- Einlass 14:00 Uhr, Prüfungsbeginn ca. 14:15 Uhr, Prüfungsdauer 90 Minuten
- Hilfsmittel: ein DIN-A4-Blatt, beidseitig beschrieben/bedruckt, ohne Hilfsmittel lesbar, mit Ihrem Namen gekennzeichnet
- Studierendenausweis bitte mitbringen
- Kugelschreiber/Filzschreiber/Füller mitbringen (kein Rot), eigenes Papier ist nicht erforderlich
- An-/Abmeldungen ab sofort bis 19.07.2022 um 23:59 Uhr im MÜSLI

Was sind die Highlights der Woche?

Welche Fragen gibt es? I

- Bedeutung von Lemma 18.1
- Faktor h in (18.4)
- Verallgemeinerung Beweis Satz 18.2 auf $[a, b]$
- Nachteil negativer Gewichte
- Warum treten negative Gewichte bei den abgeschlossenen Newton-Cotes-Formeln gerade ab $n = 8$ auf?
- Richardson-Extrapolation
- Genauigkeitgrad einer Quadratur-Formel

Welche Fragen gibt es? II

- Warum sind die Gewichte der Newton-Cotes-Formeln rationale Vielfache der Intervalllänge $b - a$?
- Quizfrage am Ende des Beweises von Lemma 20.1
- Wie berechnet man die Gewichte, z. B. bei den abgeschlossenen Newton-Cotes-Formeln?

Notwendigkeit numerischer Integration

Können Sie Beispiele dafür nennen, wo man von einer Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ nur einige Funktionswerte $f(x_i)$ kennt und dennoch $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ bestimmen möchte?

Summation der Gewichte

Warum summieren sich die Gewichte etwa der abgeschlossenen Newton-Cotes-Formeln eigentlich zu $[a, b]$?

Beispiele:

n	Gewichte	Name
1	$\frac{b-a}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$	Trapezregel
2	$\frac{b-a}{6} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$	Simpson-Regel
3	$\frac{b-a}{8} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$	3/8-Regel

Gauß-Quadratur

1. Wie sehen die ersten Elemente der als Grundlage der Gauss-Quadratur verwendeten orthogonalen Folge von Polynomen $z^{(n)}$ auf dem Intervall $[-1, 1]$ aus?
2. Wie lauten demnach die Stützstellen der ersten Gauß-Quadratur-Formeln?

Lösung: Gauß-Quadratur

Wir beginnen mit $z^{(0)} \equiv 1$ als dem eindeutigen Polynom in P_0 mit führendem Koeffizienten 1. Das nächste Polynom $z^{(1)} \in P_1$ ist $z^{(1)}(x) = x$, denn es hat den führenden Koeffizienten 1 und steht senkrecht auf $z^{(0)}$:

$$\int_{-1}^{1} 1 \cdot x \, \mathrm{d}x = 0.$$

Für das folgende Polynom $z^{(2)} \in P_2$ machen wir den Ansatz $z^{(2)}(x) = x^2 + c_1\, x + c_0$, dann gilt

$$\int_{-1}^{1} 1 \cdot (x^2 + c_1\, x + c_0) \, \mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} + c_1 \frac{x^2}{2} + c_0\, x \Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3} + 0 + 2\, c_0 = 0$$
$$\int_{-1}^{1} x \cdot (x^2 + c_1\, x + c_0) \, \mathrm{d}x = \frac{x^4}{4} + c_1 \frac{x^3}{3} + c_0 \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^{1} = 0 + \frac{2}{3} c_1 + 0 = 0$$

genau dann, wenn $c_1 = 0$ und $c_0 = -\frac{1}{3}$ ist. Das gesuchte Polynom ist also $z^{(2)}(x) = x^2 - \frac{1}{3}$.

Lösung: Gauß-Quadratur

Die gesuchten Knotenpolynome sind also
$\ell(x) = z^{(1)}(x) = x - 0$ für $n = 0$ und
$\ell(x) = z^{(2)}(x) = \left(x - (-1/\sqrt{3})\right)\left(x - 1/\sqrt{3}\right)$ für $n = 1$. Die rot markierten Zahlen sind die gesuchten Stützstellen. Die Gewichte können wir aus der Integration der zugehörigen Lagrange-Polynom erhalten: $w_i := \int_{-1}^{1} L_i^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x$. Sie sind $w_0 = 2$ im Fall $n = 0$ und $w_0 = w_1 = 1$ im Fall $n = 1$.

Das folgende Polynom ist dann $\ell(x) = z^{(3)}(x) = (x - 0)\left(x - (-\sqrt{3}/\sqrt{5})\right)\left(x - \sqrt{3}/\sqrt{5}\right)$ mit Gewichten $w_0 = w_2 = 5/9$ und $w_1 = 8/9$.

Romberg-Quadratur

Wie sieht die Quadraturformel aus, die man erhält, wenn man die Richardson-Extrapolation auf die mit der (summierten) Trapezregel erhaltenen Näherungswerte

$$a(h) = \frac{b-a}{2}\big[f(a) + f(b)\big]$$

und $a(h/2)$ anwendet?