

Plenum 08

Einführung in die Numerik
Sommersemester 2022

14.06.2022

Ausgleichsrechnung, QR-Zerlegung

Was sind die Highlights der Woche?

Welche Fragen gibt es? I

- Gradient von $f(x) = \frac{1}{2}\|Ax - b\|_2^2$
- Beweis von Satz 11.2: $f(x) > f(0)$ für alle x mit Idots
- Beweis von Satz 11.2, Aussage (ii): wurde wirklich die Äquivalenz bewiesen?
- $\|Ax\|_2 \geq \sigma_r \|x\|_2$ für alle $x \in (\ker A)^\perp$
- Ersetzung von A *in place* in Algorithmus 12.3

Gram-Schmidt-Verfahren

Schreiben Sie die ersten Schritte von Alg. 12.3 explizit auf und überzeugen Sie sich davon, dass dieser tatsächlich die normierte QR-Zerlegung erzeugt.

```
1: for  $k = 1, 2, \dots, n$  do  
2:   for  $\ell = 1, 2, \dots, k - 1$  do  
3:     Berechne  $r_{\ell k} := a_k^T q_\ell$   
4:   end for  
5:   Setze  $q_k := a_k$   
6:   for  $\ell = 1, 2, \dots, k - 1$  do  
7:     Setze  $q_k := q_k - r_{\ell k} q_\ell$   
8:   end for  
9:   Setze  $r_{kk} := \|q_k\|_2$   
10:  Setze  $q_k := \frac{q_k}{r_{kk}}$   
11: end for
```

Givens-Rotation

Wie sieht die Givens-Rotation aus, um das untere der beiden markierten Elemente zu Null zu machen?

$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Householder-Transformation

Wie sieht die Householder-Transformation aus, um die markierten Einträge auf ein Vielfaches von $(\cdot, 1, 0, 0)^T$ abzubilden?

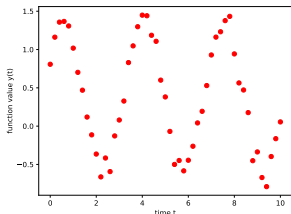
$$\begin{bmatrix} -4 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & -4 & 8 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

Kleinste-Quadrate-Aufgabe

Wir wollen die **Parameter** einer Schwingungsgleichung

$$y(t) = y_0 + a \cos(\omega t - \alpha_0)$$

aus Messdaten (y_i, t_i) ,
 $i = 1, \dots, m$ bestimmen.



- 1 Welche Bedeutung haben die Parameter?
- 2 Passt das Modell in Kapitel 5, oder muss es evtl. umformuliert werden?
- 3 Wie sehen die Designmatrix A und der Messdatenvektor b aus?
- 4 Was ist, wenn auch ω unbekannt ist?

Fehlerabschätzung für KQ-Aufgaben

Verwenden Sie die Lösungsformel

$$x = \sum_{i=1}^r \frac{u_i^T b}{\sigma_i} v_i \quad (13.1)$$

aus der Singulärwertzerlegung $A = U\Sigma V^T$, um die Einflüsse des Messfehlers Δb auf den Fehler Δx in der Lösung x abzuschätzen.

Vergleichen Sie dies mit der allgemeinen Abschätzung

$$\frac{\|\Delta x\|_2}{\|x\|_2} \leq \|A\|_{2 \rightarrow 2} \|A^{-1}\|_{2 \rightarrow 2} \frac{\|\Delta b\|_2}{\|b\|_2} \quad (3.18)$$

für die Lösung linearer Gleichungssysteme $Ax = b$.