Plenum 07

Einführung in die Numerik
Sommersemester 2022

07.06.2022 und 09.06.2022

Fehleranalyse der LR-Zerlegung
Cholesky-Zerlegung

Was sind die Highlights der Woche?

- Cholesky-Zerlegung (als Verallgemeinerung der Wurzel)

Welche Fragen gibt es? I

- Bedeutet Problemgrößenabhängigkeit in den Stabilitätskonstanten Instabilität?
- Ist (das Lösen linearer LGS über) die LR-Zerlegung nun stabil?
- Was sind die Vor- und Nachteile der LDL^T Faktorisierung von s.p.d. Matrizen gegenüber der LL^T Faktorisierung?

Beispiel 9.11

Von der exakten LR-Zerlegung

$$A = \begin{bmatrix} \varepsilon & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{\varepsilon} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon & -1 \\ 0 & 1 + \frac{1}{\varepsilon} \end{bmatrix}$$

sowie der analogen Zerlegung in Fließkommarechnung haben wir in Beispiel 9.11 gesehen, dass $|L|\,|R|$ bzw. $|\widehat{L}|\,|\widehat{R}|$ groß gegenüber $|A|$ ist und wir daher eine ungünstige Fehlerschranke und für bestimmte rechte Seiten auch tatsächlich große relative Fehler erhalten.

Beispiel 9.11 mit Pivotisierung

Wie sieht die Zerlegung mit Pivotisierung in exakter und in Fließkommarechnung aus, also für

$$PA = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \varepsilon & -1 \end{bmatrix}?$$

Wie sehen jetzt $|L|\,|R|$ bzw. $|\widehat{L}|\,|\widehat{R}|$ im Vergleich gegenüber $|PA|$ aus?

Wie ist die Auswirkung der Pivotisierung auf die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit den rechten Seiten aus Beispiel 9.11 $b = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ und $b = \left(\begin{smallmatrix} \varepsilon-1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)$?

Stabilität vom Lösen via LR-Zerlegung

Ist das Lösen linearer Gleichungssysteme über LR-Zerlegung nun also stabil? Wenn ja, in welchem Sinn?

Annahmen in Beispiel 9.11

In Beispiel 9.11 hatten wir folgende Annahmen an ε gemacht, um ein konkretes Ergebnis in Fließkommarechnung zu erhalten:

1. $\varepsilon \in \mathbb{F}$
2. $\frac{1}{\varepsilon} \in \mathbb{F}$
3. $1 \oplus \frac{1}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}$
4. $1 \ominus \frac{1}{\varepsilon} = 1 - \frac{1}{\varepsilon}$
5. $\varepsilon \ominus 1 = \varepsilon - 1$

Gibt es ein solches ε überhaupt?

Schlechte Pivotisierbarkeit

Bestimmen Sie die LR-Zerlegung von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -1 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ -1 & -1 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ -1 & -1 & \dots & 0 & 1 \\ -1 & -1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

ohne Pivotsuche.

1. Warum muss die Spaltenpivotsuche in keinem Schritt tauschen?
2. Was können Sie zur Fehlerabschätzung sagen?