Plenum 01

Einführung in die Numerik
Sommersemester 2022

26.04.2022 und 28.04.2022

Normen
(Satz von Taylor)
Landau-Notation

Was sind die Highlights der Woche?

- Pagerank Algorithmus
- Äquivalenz aller Normen im Endlichdimensionalen
- Operatornormen
- (Fréchet-)Differenzierbarkeit
- (Rigorose Einführung der) Landau Notation

Welche Fragen gibt es?

- Definition Landau Notation für Folgen
- Bedeutung der Äquivalenz von Normen
- Operatornormnotation (Normabhängigkeit in Ziel- und Ursprungsraum)
- Codierung der Informationen im Pagerank, was steht in den Matrizen, was im Vektor/den Iterierten?
- Zusammenhang Spektralnorm von A und Eigenwerte von $A^\mathsf{T} A$

Normen

Im $\mathbb{R}^n$ gelten für $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$ die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \|x\|_2 &\leqslant \|x\|_1 \leqslant \sqrt{n}\,\|x\|_2, \\ \|x\|_\infty &\leqslant \|x\|_2 \leqslant \sqrt{n}\,\|x\|_\infty, \\ \|x\|_\infty &\leqslant \|x\|_1 \leqslant n\,\|x\|_\infty. \end{aligned}$$

1. Wie zeigt man das eigentlich?
2. Wie sehen die Einheitskugeln zu diesen Normen im $\mathbb{R}^2$ aus?
3. Für welche Vektoren sind die Ungleichungen jeweils scharf?

Sind diese Abbildungen Normen?

Vektorraum V der Polynome auf $\mathbb{R}$ vom Höchstgrad n, also

$$p(x) = a_0 + a_1\,x + a_2\,x^2 + \ldots + a_n\,x^n$$

1. $$\|p\| := |a_n|$$

2. $$\|p\| := \sum_{j=0}^{n} |a_j|$$

Sind diese Abbildungen Normen?

Vektorraum V der Matrizen $\mathbb{R}^{m \times n}$

3. $$\|A\| := \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$

4. $$\|A\| := \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2$$

5. $$\|A\| := \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \right)^{1/2}$$

Operatornormen für Matrizen

Berechnen Sie $\|A\|_{1\to1}$, $\|A\|_{2\to2}$ und $\|A\|_{\infty\to\infty}$ für die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Landau Notation - Dominante Ordnung

Gegeben sei ein Polynom

$$p(x) = a_1 x + \cdots + a_k x^k, \quad a_i \geqslant 0, a_k \neq 0$$

vom Grad k.

1. Für welche $l \geqslant 0$ ist $p \in \mathcal{O}(x^l)$?
2. Für welche $l \geqslant 0$ ist $x^{(n)} := p(n) \in \mathcal{O}(n^l)$?

Landau Notation - Kurzübungen

Zeigen Sie:

Funktionen $g, h \geqslant 0$

1. $g \leqslant h \Rightarrow \mathcal{O}(g) \subseteq \mathcal{O}(h)$
2. $\mathcal{O}(g) + \mathcal{O}(h) \subseteq \mathcal{O}(g + h)$
3. $\mathcal{O}(g+h) \subseteq \mathcal{O}(\max(g, h))$
4. $g \cdot \mathcal{O}(g^k) \subseteq \mathcal{O}(g^{k+1})$

Folgen $(y^{(n)}), (z^{(n)}) \geqslant 0$

1. $y^{(n)} \leqslant z^{(n)} \Rightarrow o(y^{(n)}) \subseteq o(z^{(n)})$
2. $o(y^{(n)}) + o(z^{(n)}) \subseteq o(y^{(n)} + z^{(n)})$
3. $o(y^{(n)} + z^{(n)}) \subseteq o(\max(y^{(n)}, z^{(n)}))$
4. $y^{(n)} \cdot o({y^{(n)}}^k) \subseteq o({y^{(n)}}^{k+1})$

Asympt. Einordnung - eine Halbordnung?

Wahr oder falsch?

Auf der Menge

$$\{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \,|\, f \geqslant 0\}$$

der nichtnegativen Funktionen definieren die Relationen

$$f \preccurlyeq g \Leftrightarrow f \in \mathcal{O}(g)$$

$$f \preccurlyeq g \Leftrightarrow f \in o(g)$$

Halbordnungen, d. h. sie sind

- reflexiv: $f \preccurlyeq f$
- antisymmetrisch: $f \preccurlyeq g \wedge g \preccurlyeq f \Rightarrow f = g$
- transitiv: $f \preccurlyeq g \wedge g \preccurlyeq h \Rightarrow f \preccurlyeq h$

Page Rank

Siehe Code