R. Herzog, G. Müller, M. Hashemi, S. Meggendorfer
Universität Heidelberg



# Übung 10

Ausgabedatum: 24. Juni 2022
Abgabedatum: 5. Juli 2022

**Hausaufgabe 1.** (Eigenschaften der Tschebyschow-Polynome) 4 Punkte

Es sei $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie für die in Gleichung (17.6) des Skripts definierten Tschebyschow-Polynome $T_n$ die folgenden Aussagen:

($i$) Die Polynome $T_n$ haben Grad $n$, und ihr führender Koeffizient im Falle von $n \geqslant 1$ ist gleich $2^{n-1}$. Außerdem gilt $T_n(1) = 1$ und $T_n(-1) = (-1)^n$.

($ii$) Für $x \in [-1, 1]$ gilt die alternative Darstellung

$$T_n(x) = \cos\big(n \arccos(x)\big).$$

($iii$) Die Nullstellen von $T_n$ sind

$$x_j = \cos\left(\frac{\pi}{2}\,\frac{2j+1}{n}\right), \quad j = 0, \dots, n-1.$$

($iv$) Die Polynome $T_n$ für gerades $n$ sind gerade Funktionen, für ungerades $n$ sind sie ungerade Funktionen, für $x \in [-1, 1]$ gilt also

$$\begin{aligned} T_n(x) &= T_n(-x) && \text{für } n \text{ gerade} \\ T_n(x) &= -T_n(-x) && \text{für } n \text{ ungerade.} \end{aligned}$$

**Hausaufgabe 2.** (Allgemeine Tschebyschow-Approximation) 4 Punkte

Es seien $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum und $W \subseteq V$ ein Teilraum von $V$. Gegeben sei außerdem ein $v \in V$. Die allgemeine Tschebschow-Approximationsaufgabe lautet:

$$\text{Minimiere} \quad \|v - w\|, \quad w \in W. \tag{P}$$

Wir wollen den Beweis von Satz 17.1 aus dem Skript erweitern, um die Existenz einer Lösung für (P) zu zeigen. Geben Sie an, welche Eigenschaft Sie von $W$ fordern müssen, um die Existenz einer Lösung auf diesem Weg beweisen zu können und führen Sie den Beweis.

**Hausaufgabe 3.** (Eigenschaften der Bernstein-Polynome) 8 Punkte

Beweisen Sie Satz 16.2 aus dem Skript, also die folgenden Aussagen über die Bernsteinpolynome:

$$B_i^{(n)}(t) := \binom{n}{i}(1-t)^{n-i}\, t^i, \quad i = 0, \dots, n:$$

$(i)$ Alle Bernstein-Polynome $B_i^{(n)}$, $i = 0, \dots, n$, sind Polynome vom Grad $n$.

$(ii)$ Die Bernstein-Polynome haben auf $[0, 1]$ Werte in $[0, 1]$ und summieren sich zu eins:

$$0 \leqslant B_i^{(n)}(t) \leqslant 1 \quad \text{für alle } t \in [0,1] \quad \text{und} \quad \sum_{i=0}^{n} B_i^{(n)}(t) \equiv 1 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

$(iii)$ Es gilt sogar

$$0 < B_i^{(n)}(t) < 1 \quad \text{für alle } t \in (0,1).$$

$(iv)$ Die Bernstein-Polynom erfüllen folgende Symmetriebedingung:

$$B_i^{(n)}(t) = B_{n-i}^{(n)}(1-t).$$

$(v)$ $B_i^{(n)}(t)$ hat $t = 0$ als $i$-fache Nullstellen und $t = 1$ als $(n-i)$-fache Nullstelle.

$(vi)$ Für $n \geqslant 1$ hat $B_i^{(n)}(t)$ hat in $[0, 1]$ genau eine Maximalstelle, und zwar bei $i/n$.

$(vii)$ Die Polynome $\{B_0^{(n)}, \dots, B_n^{(n)}\}$ bilden eine Basis von $P_n$.

$(viii)$ Die Bernstein-Polynome haben eine rekursive Darstellung:

$$B_i^{(n)}(t) = \begin{cases} (1-t)\, B_0^{(n-1)}(t) & \text{im Fall } i = 0, \\ t\, B_{i-1}^{(n-1)}(t) + (1-t)\, B_i^{(n-1)}(t) & \text{im Fall } 0 < i < n, \\ t\, B_{n-1}^{(n-1)}(t) & \text{im Fall } i = n. \end{cases}$$

$(ix)$ Die erste Ableitung der Bernstein-Polynome hat ebenfalls eine rekursive Darstellung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} B_i^{(n)}(t) = \begin{cases} -n\, B_0^{(n-1)}(t) & \text{im Fall } i = 0, \\ n\, B_{i-1}^{(n-1)}(t) - n\, B_i^{(n-1)}(t) & \text{im Fall } 0 < i < n, \\ n\, B_{n-1}^{(n-1)}(t) & \text{im Fall } i = n. \end{cases}$$

**Hausaufgabe 4.** (Numerische Auswertung von Bézier-Kurven) 6 Punkte

$(i)$ Implementieren Sie den Algorithmus 16.7 von de Casteljau zur Auswertung von Bézier-Kurven.

$(ii)$ Überprüfen Sie Ihre Implementierung am Beispiel 16.6 aus dem Skript.

$(iii)$ Verwenden Sie Ihre Implementierung, um eine Bézier-Kurve in der Form des Buchstaben „S" zu generieren. Erklären Sie, wieviele Kontrollpunkte Sie dafür mindestens benötigen.

Reichen Sie Ihre Ausgaben und Ihren Code ein.

Für die Abgabe Ihrer Lösungen zu diesem Übungsblatt verwenden Sie bitte die dafür vorgesehene Abgabefunktion in Moodle.