R. Herzog, G. Müller, M. Hashemi, S. Meggendorfer
Universität Heidelberg

Übung 09

Ausgabedatum: 17. Juni 2022
Abgabedatum: 28. Juni 2022

Hausaufgabe 1. (Lagrange-Polynome) 7 Punkte

(i) Es seien $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ paarweise veschieden gegeben. Zeigen Sie Satz 15.5 aus dem Skript, also folgende Aussagen für die Lagrange-Polynome (15.6):

(a)

$$L_i^{(n)}(x_k) = \begin{cases} 1, & \text{falls } i = k, \\ 0, & \text{falls } i \neq k. \end{cases}$$

(b) Die Lagrange-Polynome $L_0^{(n)}, \dots, L_n^{(n)}$ bilden eine Basis von P_n.

(c) Die Summe aller Lagrange-Polynome ist konstant gleich 1:

$$\sum_{i=0}^{n} L_i^{(n)} \equiv 1.$$

(ii) Bestimmen Sie die baryzentrischen Gewichte für äquidistante Stützstellen $x_j = a + j\,h$ im Intervall $[a, b]$ mit $h = (b - a)/n$ und $j = 0, \dots, n$.

Hausaufgabe 2. (Newton-Polynome) 5 Punkte

(i) Es seien $x_0, \dots, x_n$ paarweise verschiedenen gegeben. Zeigen Sie Satz 15.7 aus dem Skript, also für die Newton-Polynome $N_0, \dots, N_n$ die Aussagen

(a) $N_i(x_k) = 0 \quad$ für $1 \leqslant k < i \leqslant n$.

(b) Die $N_0, \dots, N_n$ bilden eine Basis von P_n.

(ii) Formulieren Sie die Berechnung der dividierten Differenzen als Algorithmus, der die dividierten Differenzen in einer Matrix speichert.

Hausaufgabe 3. (Fehlerabschätzung für finite Differenzen) 4 Punkte

Beweisen Sie, dass die Approximationsfehler für die Näherung entsprechend oft differenzierbarer Funktionen über finite Differenzen durch

Stützstellen	n	m	Formel	Fehler	Vor.	Name
x_0, x_1	1	1	$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$	$\mathcal{O}(h)$	$f \in C^2$	Vorwärtsdifferenz
x_{-1}, x_0	1	1	$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0)-f(x_0-h)}{h}$	$\mathcal{O}(h)$	$f \in C^2$	Rückwärtsdifferenz
x_{-1}, x_0, x_1	2	1	$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$	$\mathcal{O}(h^2)$	$f \in C^3$	zentrale Diff.
x_{-1}, x_0, x_1	2	2	$f''(x_0) \approx \frac{f(x_0-h)-2f(x_0)+f(x_0+h)}{h^2}$	$\mathcal{O}(h^2)$	$f \in C^4$	zentrale Diff. für 2. Abl.

gegeben ist.

Beachte: Im Skript ist in der Tabelle ein Vorzeichenfehler.

Hausaufgabe 4. (Vergleich der relativen Rundungsfehler) 7 Punkte

Implementieren Sie Polynominterpolation bzgl. der Monombasis über direktes Lösen des Vandermonde-Systems sowie bzgl.

- der Lagrange-Polynome mit baryzentrischen Gewichten *oder*
- der Newton-Polynome mit dividierten Differenzen und Horner Schema

in Python. Untersuchen Sie den relativen numerischen Fehler der angegebenen Varianten numerisch, indem Sie vorgegebene Polynome an Stützstellen interpolieren, die Sie bei gleichen Abständen in Richtung ∞ verschieben. Erzeugen Sie eine geeignete Ausgabe und reichen Sie die Ausgabe und ihren Code ein.

Beachte: Diese Aufgabe bezieht sich auf den Fehler im Ergebnis, der durch Rundung entsteht, nicht den Approximationsfehler, den wir in § 15.4 abgeschätzt haben.

Für die Abgabe Ihrer Lösungen zu diesem Übungsblatt verwenden Sie bitte die dafür vorgesehene Abgabefunktion in Moodle.