R. Herzog, G. Müller, M. Hashemi, S. Meggendorfer
Universität Heidelberg

Übung 08

Ausgabedatum: 10. Juni 2022
Abgabedatum: 21. Juni 2022

Hausaufgabe 1. (Eindeutigkeit der Lösung der Kleinste-Quadrate-Aufgabe (11.1)) 4 Punkte

Beweisen Sie Folgerung 11.3 aus dem Skript, also

Folgerung. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(i) *Die Lösung der Kleinste-Quadrate-Aufgabe* (11.1) *ist eindeutig.*

(ii) *Die zu A gehörige Abbildung ist injektiv, also* $\ker A = \{0\}$.

(iii) *A hat vollen Spaltenrang, also* $\operatorname{Rang}(A) = n$.

Hausaufgabe 2. (Stetigkeit in der QR-Zerlegung) 4 Punkte

Zeigen Sie:

(i) Die Menge der regulären Matrizen in $\mathbb{R}^{n \times n}$ für $n \in \mathbb{N}$ ist offen.

Hinweis: Sie können verwenden, dass der Vektor der aufsteigend sortierten Eigenwerte einer symmetrischen Matrix stetig von den Einträgen dieser Matrix abhängt. Insbesondere ist der kleinste Eigenwerte einer solchen Matrix abhängig von ihren Einträgen.

(ii) Die Einträge der eindeutigen normierten QR-Zerlegung einer regulären Matrix A hängen stetig von den Einträgen von A ab.

Hinweis: Untersuchen Sie das Gram-Schmidt Verfahren.

Hausaufgabe 3. (Vergleich der Gram-Schmidt-Verfahren) 10 Punkte

In dieser Aufgabe beschäftigen wir uns mit den beiden im Skript als Algorithmen 12.3 und 12.4 vorgestellten Versionen der Gram-Schmidt-Orthogonalisierung.

(i) Zeigen Sie, dass die beiden Verfahren in exakter Rechnung das gleiche Ergebnis liefern.

(ii) Bestimmen Sie die numerische Komplexität beider Algorithmen.

(iii) Implementieren Sie beide Verfahren in Python und vergleichen Sie die Orthogonalität der Ergebnisse anhand geeigneter Beispiele.

Hinweis: Untersuchen können sie bspw. Hilbert Matrizen.

Hausaufgabe 4. (Ausgleichsprobleme) 6 Punkte

Es sei die Funktionenfamilie $f_\alpha\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f_\alpha(t) = \alpha_0 t^3 + \alpha_1 \pi \sin(t^2) + \alpha_2 \log(3t) + \alpha_3 \exp(t) + \alpha_4$$

gegeben. Unter diesem Link finden Sie verschiedene Datensätze. Jeder Datensatz enthält Auswertungen $(t_i, f_\alpha(t_i))$, $i = 1, \dots, n$ für Stützstellen $t_i > 0$ zu einer festen Wahl des Vektors $\alpha \in \mathbb{R}^5$ je Datensatz. Entscheiden Sie für jeden der Datensätze, welche der Funktionen t^3, $\pi \sin(t^2)$, $\log(3t)$, $\exp(t)$ und 1 bei der Erzeugung des Datensatzes einen Anteil hatten, also welche der α_i ungleich 0 gewesen sind. Gehen Sie dabei wie folgt vor.

(i) Formulieren Sie ein lineares Ausgleichsproblem, dessen Lösung Ihnen die Lösung zur obigen Aufgabenstellung liefert.

(ii) Implementieren Sie einen direkten linearen Gleichungssystemlöser auf Basis der QR-Zerlegung in Python. Sie dürfen wählen, ob Sie für die Berechnung der QR-Zerlegung die Gram-Schmidt-Orthogonalisierung aus Hausaufgabe 3 oder Householder-Transformationen verwenden. Testen Sie Ihren Löser auf Korrektheit. Erzeugen Sie eine geeignete Ausgabe und geben Sie Ihren Code mit ab.

(iii) Lösen Sie die Ausgleichsprobleme zu den jeweiligen Datensätzen und geben Sie die Lösung der ursprünglichen Aufgabenstellung an. Erzeugen Sie eine geeignete Ausgabe und geben Sie Ihren Code mit ab.

Hinweis: Laden Sie die Datensätze mit `t, f = numpy.load( <Name>.npy )`.

Für die Abgabe Ihrer Lösungen zu diesem Übungsblatt verwenden Sie bitte die dafür vorgesehene Abgabefunktion in Moodle.