Übung 07

Ausgabedatum: 3. Juni 2022
Abgabedatum: 14. Juni 2022

Hausaufgabe 1. (Rückwärtsanalyse des Lösens eines LGS via LR-Zerlegung mit Pivotsuche) 5 Punkte

Beweisen Sie Satz 9.14 aus dem Skript, also den folgenden Satz.

Satz (Rückwärtsanalyse der Lösung eines linearen Gleichungssystems mittels LR-Zerlegung mit Spaltenpivotisierung)**.** *Es gelten die Voraussetzungen von Satz 9.13 und $n\,\varepsilon_{\text{mach}} \leqslant C < 1$. Es werde die LR-Zerlegung von $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ mit Spaltenpivotisierung mittels Algorithmus 9.12 bestimmt und anschließend das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit $b \in \mathbb{F}^n$ mit Hilfe der Vorwärts- und Rückwärtssubstitution (Algorithmen 9.1 und 9.2) in der Form $Ly = Pb$ und $Rx = y$ gelöst. Die erhaltene Näherungslösung sei $\widehat{x}$. Dann gilt: Es gibt eine Matrix E, sodass gilt:*

$$(A + E)\,\widehat{x} = b \quad \textit{mit} \quad |E| \mathrel{\dot{\leqslant}} 3\,(n-1)\big(|A| + P^\intercal |\widehat{L}|\,|\widehat{R}|\big)\,\varepsilon_{\text{mach}} + 2\,\gamma_n\,P^\intercal |\widehat{L}|\,|\widehat{R}|.$$

Hausaufgabe 2. (Ableitung der Cholesky-Zerlegung aus der LR-Zerlegung) 6 Punkte

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine symmetrische und positiv definite Matrix. Wir wollen in dieser Aufgabe zeigen, dass wir die eindeutige Cholesky-Zerlegung von A auch aus der LR-Zerlegung bzw. dem Gaussschen Eliminationsverfahren erhalten hätten können. Gehen Sie dafür wie folgt vor.

(i) Zeigen Sie, dass das Verfahren der Gaussschen Elimination ohne Pivotisierung auf A anwendbar ist.

Hinweis: Zeigen Sie, dass jede der im Gausschen Eliminationsverfahren in der rechten unteren Ecke entstehenden $k \times k$-Untermatrizen mit $k \in \{1, \dots, n\}$ wiederum symmetrisch und positiv definit ist.

(ii) Verwenden Sie Aussage (i) um zu zeigen, dass die Matrix A eine eindeutige Cholesky Zerlegung besitzt.

Hausaufgabe 3. (Implementierung verschiedener Pivotsuchen für die LR-Zerlegung) 8 Punkte

Implementieren Sie einen Löser für lineare Gleichungssysteme $Ax = b$ in Python, der für eine vom Anwender getroffene Wahl aus den Pivotsuchen

(i) Keine Pivotsuche

(ii) Spaltenpivotsuche

(iii) Zeilenpivotsuche

(iv) totale Pivotsuche

(v) umgekehrte totale Pivotsuche (Wahl eines betragskleinsten nicht-Null Elements)

mittels des Gaussschen Eliminationsverfahrens in-place eine LR-Zerlegung von $PAQ^\intercal$ berechnet und die Lösung des Gleichungssystem durch vorwärts-rückwarts Lösen bestimmt.

Testen Sie Ihre Implementierung auf Korrektheit. Erzeugen Sie eine geeignete Ausgabe und geben Sie die erzeugte Ausgabe und den Code ab.

Beachte: Diese Aufgabe baut auf der Aufgabe der Vorwoche auf.

Hausaufgabe 4. (Einfluss verschiedener Pivotsuchen beim Lösen über LR-Zerlegung) 6 Punkte

In dieser Aufgabe wollen wir das Verhalten der in Hausaufgabe 3 implementierten Pivotsuchen numerisch untersuchen. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(i) Lösen Sie eines der linearen Gleichungssysteme aus Beispiel 9.11 numerisch für verschiedene ε einmal ohne Pivotsuche sowie für eine weitere der Pivotsuchen aus Hausaufgabe 3 und untersuchen Sie die Fehler Ihrer berechneten Lösungen.

(ii) Lösen Sie mit Ihren Verfahren aus Hausaufgabe 3 Probleme der Form $Ax = b$ für

- Matrizen A, die Sie erzeugen, indem Sie zufällig die Dimension von A festlegen, dann zufällig betragsmäßig große Zahlen in A schreiben und dann in jeder Zeile einige aber nicht alle Einträge auf 1 setzen und

- rechte Seiten b, die Sie erzeugen, indem Sie $b := Ax$ für $x = (1, \dots, 1)^\mathsf{T}$ berechnen

und untersuchen Sie die Fehler Ihrer berechneten Lösungen.

Erzeugen Sie für jede Teilaufgabe eine geeignete Ausgabe, interpretieren Sie die Ergebnisse und geben Sie die erzeugten Ausgaben und den Code ab.

Für die Abgabe Ihrer Lösungen zu diesem Übungsblatt verwenden Sie bitte die dafür vorgesehene Abgabefunktion in Moodle.