R. Herzog, G. Müller, M. Hashemi, S. Meggendorfer
Universität Heidelberg

Übung 03

Ausgabedatum: 6. Mai 2022
Abgabedatum: 17. Mai 2022

Hausaufgabe 1. (SVD und die transponierte Matrix) 3 Punkte

Gegeben sei eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit Singulärwertzerlegung $A = U\Sigma V^\intercal$.

(i) Leiten Sie eine Singulärwertzerlegung von $A^\intercal$ aus der von A her.

(ii) Zeigen Sie damit, dass

(a) $\|A\|_{2\to 2} = \|A^\intercal\|_{2\to 2}$,

(b) $\operatorname{Bild}(A^\intercal) = \ker(A)^\perp$.

Hausaufgabe 2. (Matrixkondition ist invariant unter Produktbildung mit orth. Matrizen) 3 Punkte

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Matrix und $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine orthogonale Matrix.

Zeigen Sie Folgerung 4.10 aus dem Skript, also die folgenden Aussagen:

(i) $\|AW\|_{2\to 2} = \|WA\|_{2\to 2} = \|A\|_{2\to 2}$

(ii) Wenn A regulär ist, dann ist $\kappa(AW) = \kappa(WA) = \kappa(A)$.

Hausaufgabe 3. (Singulärwerte entsprechen Streckungsfaktoren) 3 Punkte

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine reguläre Matrix. Zeigen Sie, dass die Menge

$$E = \{Ax \mid x \in \mathbb{R}^n, \|x\|_2 = 1\}$$

ein rotierter Hyperellipsoid ist, dessen Halbachsenlängen die Singulärwerte σ_i von A sind und dessen Rotation durch die Linkssingulärvektoren u_i von A bestimmt wird.

Hinweis: Ein solcher Hyperellipsoid hat die Darstellung

$$D := \left\{ y \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} \frac{(y^\top u_i)^2}{\sigma_i^2} = 1 \right\}.$$

Hausaufgabe 4. (Bildkompression über SVD-Niedrigrangapproximation) 5 Punkte

Implementieren Sie ein Verfahren zur verlustbehafteten Bildkompression über die Niedrigrangapproximation der Singulärwertzerlegung in Python, visualisieren Sie die Effekte und beschreiben Sie Ihre Beobachtung. Erzeugen Sie eine geeignete Ausgabe und geben Sie die erzeugte Ausgabe und den Code ab.

Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(i) Laden Sie das beliebte 256×256-Pixel Schwarzweiß-Testbild eines Kameramannes herunter.

(ii) Nutzen Sie `matplotlib.image.imread` um das Testbild einzulesen.

(iii) Zerlegen Sie die eingelesene Matrix A mit Hilfe der Singulärwertzerlegung aus `numpy.linalg.svd`.

(iv) Konstruieren Sie für alle Ränge k mit $0 \leqslant k \leqslant \operatorname{Rang}(A)$ die Niedrigrangbestapproximation $\hat{A}$ der Matrix A nach Satz 4.11 aus dem Skript und plotten Sie diese.

(v) Plotten Sie $\hat{A}$ und $A - \hat{A}$ mit Hilfe von `matplotlib.pyplot.imshow`.

(vi) Speichern Sie die Approximation mit Hilfe von `matplotlib.pyplot.imsave`.

Für die Abgabe Ihrer Lösungen zu diesem Übungsblatt verwenden Sie bitte die dafür vorgesehene Abgabefunktion in Moodle.