R. Herzog, G. Müller, M. Hashemi, S. Meggendorfer
Universität Heidelberg

Übung 02

Ausgabedatum: 29. April 2022
Abgabedatum: 10. Mai 2022

Hausaufgabe 1. (Absolute und relative Kondition) 4 Punkte

Bestimmen Sie die absoluten und relativen (partiellen) Konditionszahlen der folgenden Funktionen (in Abhängigkeit der Argumente) an den Punkten im Definitionsbereich, in denen die Funktionen differenzierbar sind. Erklären Sie, wo die Auswertung der Funktion (absolut bzw. relativ) am sensibelsten auf Abweichungen im Argument reagiert.

(i) $f\colon \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x}$

(ii) $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sin(x)$

(iii) $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ f(x) = \|x\|_2$

(iv) $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ f(x) = \|x\|_1$

Hausaufgabe 2. (Darstellungen der abs. Konditionszahl (siehe Bemerkung 3.5 im Skript) 6 Punkte

Es sei $F\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und

$$LS(x) \coloneqq \lim_{\varepsilon \searrow 0} \sup_{\substack{\|\Delta x\| < \varepsilon \\ \Delta x \neq 0}} \frac{\|F(x+\Delta x) - F(x)\|_2}{\|\Delta x\|_2} \in [0, \infty].$$

(i) Zeigen Sie:

(a) Ist F an x differenzierbar, dann ist $K(x) = LS(x)$.

(b) Ist F in einer Umgebung von x Lipschitz-stetig mit Konstante $L > 0$, dann ist $LS(x) \leqslant L$.

(ii) Untersuchen sie den Term $LS(x)$ an den Punkten, an denen die Abbildungen nicht differenzierbar sind.

(a) $f: \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x}$

(b) $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ f(x) = \|x\|_2$

(c) $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ f(x) = \|x\|_1$

Hausaufgabe 3.

(Kondition und lineare Gleichungssysteme) 5 Punkte

Die Lage eines ebenen Objekts im dreidimensionalen Raum mit Raumkoordinaten $(x, y, z)^\intercal \in \mathbb{R}^3$ soll über drei Distanzsensoren bestimmt werden. Die Sensoren sind an den Stellen

$$p_1 = (0.9, 0, 0)^\intercal, \qquad p_2 = (1, 1, 0)^\intercal \qquad \text{und} \qquad p_3 = (1, -0.5, 0)^\intercal$$

angebracht und messen den vertikalen Abstand des Objekts zu den Sensoren. Die Sensoren liefert also drei Punkte mit den Koordinaten $(0.9, 0, z_1)^\intercal$, $(1, 1, z_2)^\intercal$ und $(1, -0.5, z_3)^\intercal$, die bekanntermaßen in der Ebene liegen. Aus diesen Messungen soll die Lage des Objekts mit Hilfe der Parameter $a = (a_1, a_2, a_3)^\intercal \in \mathbb{R}^3$ über die Ebenengleichung

$$a_1 x + a_2 y + a_3 = z$$

rekonstruiert und beschrieben werden.

Für das Objekt, das wir in diesem Beispiel untersuchen wollen, würden die Sensoren ohne Messfehler die Messwerte $z_{\text{Mess}} = (3.9, 6, 3)$ liefern.

(i) Bestimmen Sie die Ebenenparameter a_{Mess} zu den Messwerten z_{Mess} exakt.

(ii) Bestimmen Sie den größten relativen Fehler $\|\Delta a\|_2 / \|a_{\text{mess}}\|_2$ in den Ebenenparametern, der bei einer relativen Messungenauigkeit des Sensors an p_1 von höchstens 10% auftreten kann.

(iii) Wenn Sie den ersten Sensor von p_1 nach $(0, 0, 0)^\intercal$ verschieben, müsste dieser Sensor Ihnen für das gleiche Objekt den Wert $z_1 = 3$ liefern. Zeigen Sie ohne Berechnung des absoluten Fehlers $\|\Delta a\|_2$, dass diese Verschiebung gegenüber der Situation in Aussage (ii) zu einem besseren relativen Fehler in den Ebenenparametern führt, wenn die Messungenauigkeit des verschobenen Sensors weiterhin höchstens 10% beträgt.

(*iv*) Zeigen Sie, dass die auftretende Matrix der Konfiguration aus Aussage (*iii*) besser konditioniert ist als die Matrix der Ursprungskonfiguration. Erklären Sie geometrisch, warum das so ist.

Hausaufgabe 4. (Kondition zusammengesetzter Funktionen) 3 Punkte

Gegeben seien die Funktionen

$$g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \qquad \text{und} \quad h\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$g(x) = \begin{pmatrix} e^x \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \quad h(x) = e^{x_2}.$$

Bestimmen Sie die absoluten und die relativen Konditionszahlen der Funktionen g und h und der zusammengesetzten Funktion $f \coloneqq (h \circ g)$. Erklären Sie, warum die Abschätzungen aus Gleichungen (3.25) und (3.27) im Skript für dieses Beispiel zu einer ungenauen Fehleranalyse führen können.

Für die Abgabe Ihrer Lösungen zu diesem Übungsblatt verwenden Sie bitte die dafür vorgesehene Abgabefunktion in Moodle.