Plenum 13

Grundlagen der Optimierung
Wintersemester 2021

04.02.2022 und 07.02.2022

Kegel
Optimalitätsbedingungen
Richtung des steilsten Abstiegs

Was sind die Highlights der Woche?

- Optimalitätsbedingungen
- Existenz/Eindeutigkeit der Richtung des steilsten Abstiegs
- Berechnung der Richtung des steilsten Abstiegs als Projektion der Null auf das Subdifferential
- Beispiel für ungünstiges Konvergenzverhalten für Verfahren des steilsten Abstiegs im Nichtglatten

Welche Fragen gibt es?

- Liefert Satz 18.4 eine Existenzaussage?
- Wofür benötigt man die Abgeschlossenheit der Menge in Folgerung 18.5?
- Wie kann man die Projektionsdarstellung der Richtung des steilsten Abstiegs visualisieren?
- Was ist die Bedeutung und der Unterschied von Außer- und Innerhalbstetigkeit beim Subdifferential.

Kegel der zulässigen Richtungen

Illustrieren Sie den Kegel der zulässigen Richtungen und den Radialkegel

$$\mathcal{F}_M(x) := \left\{ d \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{es gibt ein } \varepsilon > 0, \text{ sodass} \\ x + t\,d \in M \text{ für alle } t \in [0, \varepsilon] \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{K}_M(x) := \left\{ \beta\,(y - x) \;\middle|\; y \in M,\ \beta > 0 \right\}$$

an einigen Beispielen.

Sind $\mathcal{F}_M(x)$, $\mathcal{K}_M(x)$ immer abgeschlossen/konvex/gleich?

Normalenkegel

Illustrieren Sie den Normalenkegel

$$\mathcal{N}_M(x) \coloneqq \big\{ s \in \mathbb{R}^n \,\big|\, s^\mathsf{T}(y - x) \leqslant 0 \text{ für alle } y \in M \big\}$$

an einigen Beispielen.

Optimalitätsbedingungen

Bestimmen Sie die eindeutige Lösung x^* der Aufgabe

$$\text{Minimiere} \quad \tau \, \|x\|_1 + \frac{1}{2}\|x - z\|_2^2$$

für gegebenes $\tau \geqslant 0$ und z, zunächst in $\mathbb{R}$ und dann in $\mathbb{R}^n$.

Die Lösung $z \mapsto x$ definiert die sogenannte proximale Abbildung von τf mit $f(x) = \|x\|_1$:

$$x^* = \operatorname{prox}_{\tau f}(z).$$

Optimalitätsbedingungen

Bestimmen Sie die eindeutige Lösung x^* der Aufgabe

$$\text{Minimiere} \quad \tau \, \|x\|_2 + \frac{1}{2}\|x - z\|_2^2$$

für gegebenes $\tau \geqslant 0$ und z in $\mathbb{R}^n$.

Die Lösung $z \mapsto x$ definiert die proximale Abbildung von τf mit $f(x) = \|x\|_2$:

$$x^* = \operatorname{prox}_{\tau f}(z).$$

Richtung des steilsten Abstiegs

Bestimmen Sie die Richtung des steilsten Abstiegs für $f(x) = \|x\|_1$ und $g(x) = \|x\|_\infty$ an einigen interessanten Punkten $x \in \mathbb{R}^2$.