Plenum 11

Grundlagen der Optimierung
Wintersemester 2021

21.01.2022 und 24.01.2022

Trennungssätze
Subdifferential

Was sind die Highlights der Woche?

- Trennungssätze allgemein

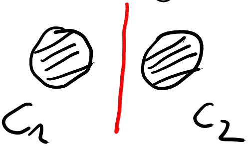
Welche Fragen gibt es?

Subdifferential im M-Skalarprodukt

Berechnung einzelner Elemente bzw. des gesamten Subdifferentials für "beliebige" konvexe Funktionen

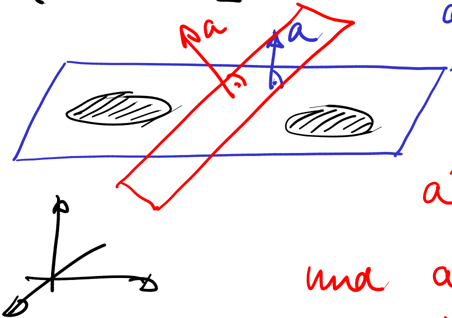
Subdifferential der 1-Norm

Was ist der Unterschied zwischen dem „einfachen" Trennungssatz und dem eigentlichen Trennungssatz?



2D-Mengen in $\mathbb{R}^2$

$a^T x_1 \le \beta \le a^T x_2 \quad \forall x_1 \in C_1$
$\forall x_2 \in C_2$



2D-Mengen in $\mathbb{R}^3$

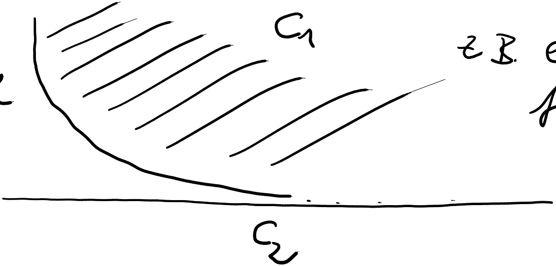
$a^T x_1 \le \beta \le a^T x_2 \quad \forall x_1 \in C_1$
$\forall x_2 \in C_2$

und $a^T \bar{x}_1 < a^T \bar{x}_2$ für ein
$x_1 \in C_1$ und $x_2 \in C_2$

Trennungssätze

Warum reicht es beim strikten Trennungssatz nicht aus, dass die zu trennenden Mengen C_1 und C_2 beide konvex und abgeschlossen sind?

Gegen-beispiel



z.B. $\operatorname{epi}(x \mapsto \frac{1}{x})$ für $x > 0$

Das Farkas-Lemma revisited

Lemma 8.6

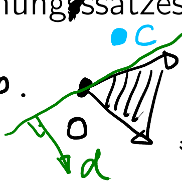
Begründen Sie, dass das Farkas-Lemma ein Spezialfall des strikten Trennungssatzes ist.

abg., konv / Lemma 6.10

Es sind äquivalent:

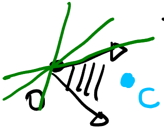
(i) $B^T \xi = c$ hat Lösung $\xi \geq 0$.
$(c \in \operatorname{cone}\{b_1, \ldots, b_m\})$

(ii) $Bd \geq 0 \Rightarrow c^T d \geq 0$
(Ist $C_1 \subseteq H^+(d,0)$, dann auch $c \in H^+(d,0)$.)



$K = C_1 = \operatorname{cone}\{b_1, \ldots, b_m\}$

Spalten von B^T



$C_2 = \{c\}$

(i) $\Rightarrow$ (ii) wie gehabt

$\neg$(i) $\Rightarrow$ $\neg$(ii) strikter Trennungssatz: Es gibt $H(d,\beta)$ mit

$$\underbrace{d^T x > \beta > d^T c \qquad \forall x \in C_1}$$

Das Farkas-Lemma revisited

$0 \in C_1 \Rightarrow 0 > \beta$. $\quad d^T x > \beta > c^T d \;\; \forall x \in C_1$

Weiterhin: $\boxed{d^T x \geq 0}$ für alle $x \in C_1$.

Denn: Falls $d^T x < 0$ wäre für ein $x \in C_1$,

wähle λx für $\lambda > 0 \Rightarrow \underbrace{d^T(\lambda x)}_{} < 0$. $\lightning$

$\xrightarrow{\lambda \to \infty} -\infty$

$d^T x \geq 0 > \beta > c^T d \quad \underline{\forall x \in C_1}$. $\qquad x = B^T \xi$ für $\xi \geq 0$

$\Rightarrow \underline{d^T B^T} \xi \geq 0 \quad \forall \xi \geq 0$

$\Leftrightarrow Bd \geq 0$

D.h. wir haben ein $d \in \mathbb{R}^n$ gefunden

mit $Bd \geq 0$, aber $c^T d < 0$, also $\neg$ ii).

Subdifferential

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ konvex

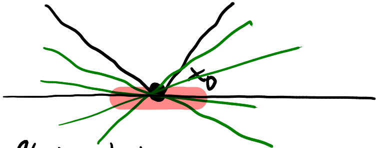
Was haben die Mengen lineare Minorante

$\partial f(x_0)$

$$\left\{ s \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; f(x) \geqslant f(x_0) + s^\top (x - x_0) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}^n \right\}$$

$$\subseteq \left\{ s \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; f(x) \geqslant f(x_0) + s^\top (x - x_0) \text{ für alle } x \in B_\varepsilon(x_0) \right\}$$

miteinander zu tun?



$f(x) = |x|, \; x_0 = 0$

$\partial f(x_0) = [-1, 1]$

Subdifferential

Behauptung: $s \in \partial f(x_0)$ genau dann, wenn

$$f(\bar{x}) \ge f(x_0) + s^T(\bar{x} - x_0) \quad \forall \bar{x} \in B_\varepsilon(x_0). \qquad (*)$$

Zu zeigen: $(*) \Rightarrow (16.1)$ $\quad \|x - x_0\| \ge \varepsilon$

Es sei $x \in \mathbb{R}^n$ und setzen $\bar{x} := \alpha x + (1-\alpha) x_0$

mit $\alpha = \dfrac{\varepsilon/2}{\|x - x_0\|} \in (0, \frac{1}{2}]$. $\quad \bar{x} \in B_\varepsilon(x_0)$

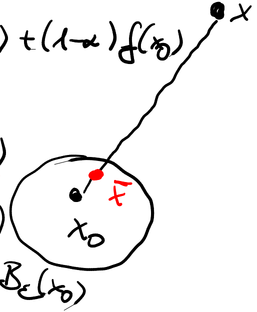
Konvexität von f: $\quad f(\bar{x}) \le \alpha f(x) + (1-\alpha) f(x_0)$

$$\Rightarrow \cancel{\alpha} f(x) \ge f(\bar{x}) - (1-\alpha) f(x_0)$$

$$\overset{(*)}{\ge} f(x_0) - (1-\alpha) f(x_0) + s^T(\bar{x} - x_0)$$

$$= \alpha f(x_0) + s^T(\alpha x + (1-\alpha) x_0 - x_0)$$

$$= \cancel{\alpha} f(x_0) + \cancel{\alpha} s^T(x - x_0)$$



Lokale Minimierer sind globale Minimierer

Beweisen Sie mit Hilfe der gerade gewonnenen Erkenntnis

$$\partial f(x_0) = \{ s \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \geqslant f(x_0) + s^\top (x - x_0) \text{ für alle } x \in B_\varepsilon(x_0) \}$$

nochmals, dass lokale Minimierer konvexer Funktionen bereits globale Minimierer sind.

x^* lokaler Minimierer von f

$\Rightarrow f(x) \geq f(x^*) + 0^T (x - x^*) \quad \forall x \in B_\varepsilon(x^*)$

$\Rightarrow 0 \in \partial f(x^*) \quad \Rightarrow f(x) \geq f(x^*) + 0^T (x - x^*) \; \forall x \in \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow x^*$ glob. Minimierer von f