

Plenum 05

Grundlagen der Optimierung
Wintersemester 2021

19.11.2021 und 22.11.2021

Das Simplex-Verfahren

Was sind die Highlights der Woche?

- das Simplex-Verfahren

Welche Fragen gibt es?

- Finden einer weiteren optimalen Ecke
- Wieviele Schritte braucht man im Phase-I-Problem mindestens, um zu einer Basis in $\{1, \dots, n\}$ zu gelangen?
- Implementierung eines Simplex-Schrittes in Python („lange“ vs. „kurze“ Vektoren)
- Warum verwendet das Simplex-Verfahren nur benachbarte Ecken?
- Erkennen eines unbeschränkten LPs (Lemma 7.2)
- schlechteste Laufzeit des Simplex? exponentiell oder faktoriell in n ?

Bemerkungen zum Simplex-Verfahren

Polyeder in Normalform mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$:

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$$

- 1 Warum ist $\text{rank}(A) = m$ zur Durchführung des Simplex-Verfahrens wichtig?
- 2 Was bedeutet diese Bedingung?
- 3 Wie/wo/wann wird die Unzulässigkeit eines LP festgestellt?

Kurze und lange Vektoren

Wie implementieren wir folgende Operationen in Python?

1 $x_B := A_B^{-1} b$

2 $\tilde{c}_N := c_N - A_N^T A_B^{-T} c_B$

`x[B] = np.linalg.solve(A[:,B], b)`

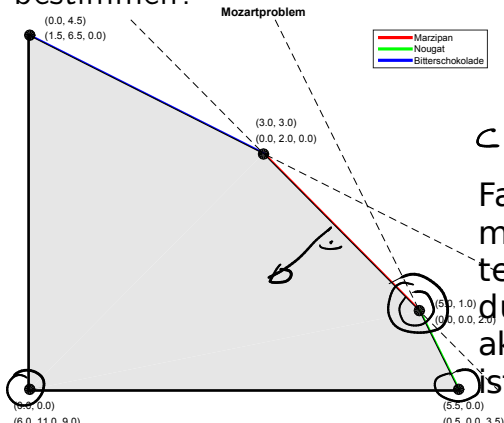
`reducedCost[N] = \`
`c[N] - A[:,N].T @ np.linalg.solve(A[:,B].T, c[B])`

Simplex-Schritt

Wir wollen den Simplex-Schritt aus Beispiel 7.5 in Python nachvollziehen.

Finden weiterer optimaler Basisvektoren

Das Simplex-Verfahren stoppt mit dem Finden der ersten optimalen Ecke. Angenommen, es gibt weitere optimale Ecken. Wie könnte man eine solche bestimmen?



$$x_1 + x_2 + x_3 = 6$$

$$c = \begin{pmatrix} -8 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Falls $\tilde{c}_r = 0$ gilt, so kann man einfach einen weiteren Simplex-Schritt durchführen, obwohl der aktuelle BV bereits optimal ist.

Reduzierte Kosten und optimale Ecken

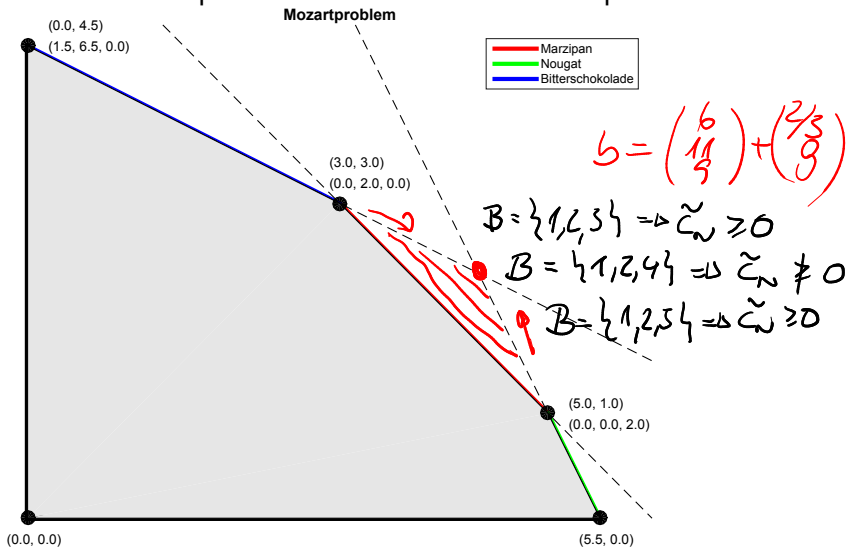
Lemma 7.1 besagt: Ist x eine zulässiger Basisvektor und sind die reduzierten Kosten $\tilde{c}_N \geq 0$, dann ist diese Ecke optimal.

Gilt auch die Umkehrung?

Es gilt: Ist x ein optimaler BV, dann gibt es eine Basis, sodass die reduzierten Kosten ≥ 0 sind. Falls x degeneriert ist, so gilt diese Aussage aber ggf. nicht für jede mögliche Basis.

Reduzierte Kosten und optimale Ecken

Hier als Beispiel das modifizierte Mozartproblem:



Welche Fragen gibt es?