Plenum 04

Grundlagen der Optimierung
Wintersemester 2021

12.11.2021 und 15.11.2021

Modellierung linearer Optimierungsaufgaben
Existenz von Lösungen
Basisvektoren

Was sind die Highlights der Woche?

- Es ist immer möglich, ein LP in Normalform zu bringen.
- Lokale Minimierer bei LP sind globale Minimierer.
- Visualisierungsmöglichkeiten und grafische Lösung von LP
- Hauptsatz der linearen Optimierung: Unter den Lösungen (falls nichtleer) ist immer eine Ecke.

Welche Fragen gibt es?

- Definition des Rezessionskegels
- Vorstellung von Ecken eines Polyeders und Basisvektoren
- Aufteilung $x_i \rightsquigarrow x_i^+ - x_i-$ bei Konvertierung eines LP in Normalform
- Was ist die konische Hülle?
- Gibt es bessere Schranken für die Anzahl der Ecken als $\binom{n}{m}$?
- Warum enthält die Lösungsmenge eines LP (falls nichtleer) immer eine Ecke?
- Wie kann man echte Ungleichungen in LPs behandeln?

Aufgaben mit 1-Norm und ∞-Norm

Wir wollen folgende Aufgaben jeweils als lineare Optimierungsprobleme umformulieren:

1. Aufgaben mit der 1-Norm $\|y\|_1 = \sum_{i=1}^m |y_i|$

$$\text{Minimiere} \quad \|Ax - b\|_1 \quad \text{über } x \in \mathbb{R}^n$$

Minimiere 1*t über (x,t) in R^{n+m} unter -t \le Ax-b \le t

2. Aufgaben mit der ∞-Norm $\|y\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,m} |y_i|$

$$\text{Minimiere} \quad \|Ax - b\|_\infty \quad \text{über } x \in \mathbb{R}^n$$

Minimiere t über (x,t) in R^{n+1} unter -t1 \le Ax-b \le t1

Dabei sind $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^m$.

Existenz von Lösungen

Die Kompaktheit einer nichtleeren Sublevelmenge ist zwar hinreichend (Satz 1.4), aber nicht notwendig für die Lösbarkeit eines LP.

Finden Sie Beispiele linearer Optimierungsaufgaben für folgende Situationen:

1. Alle nichtleeren Sublevelmengen sind unbeschränkt, und das LP besitzt einen Minimierer. Minimiere x1 unter (x1,x2) \ge 0
2. Alle nichtleeren Sublevelmengen sind unbeschränkt, und das LP besitzt keinen Minimierer. Minimiere -x1 unter (x1,x2) \ge 0

Rezessionskegel

Es sei

$$P := \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b,\ x \geqslant 0\}$$

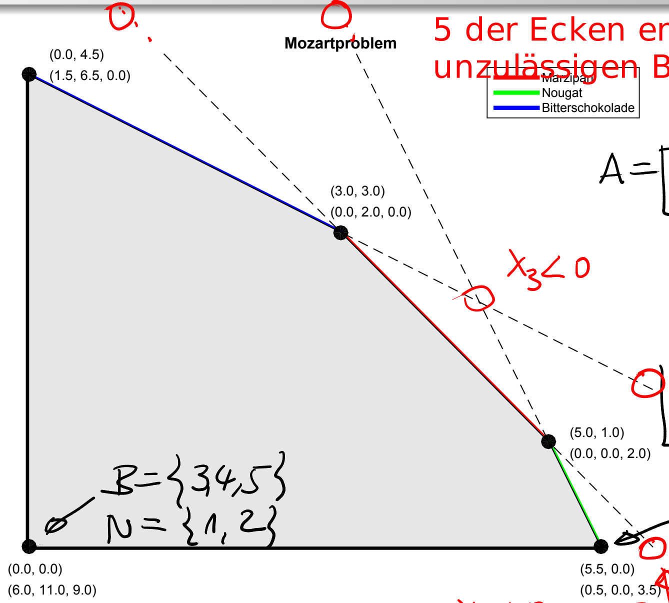
ein Polyeder in Normalform.

Welche Bedeutung hat der Rezessionskegel

$$\{d \in \mathbb{R}^n \mid A\,d = 0,\ d \geqslant 0\}?$$

Basisvektoren beim Mozartproblem

5 der Ecken entsprechen unzulässigen Basisvektoren



$$A = \left[\begin{array}{cc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$x_3 < 0$

$\boxed{x_B \geq 0}$?

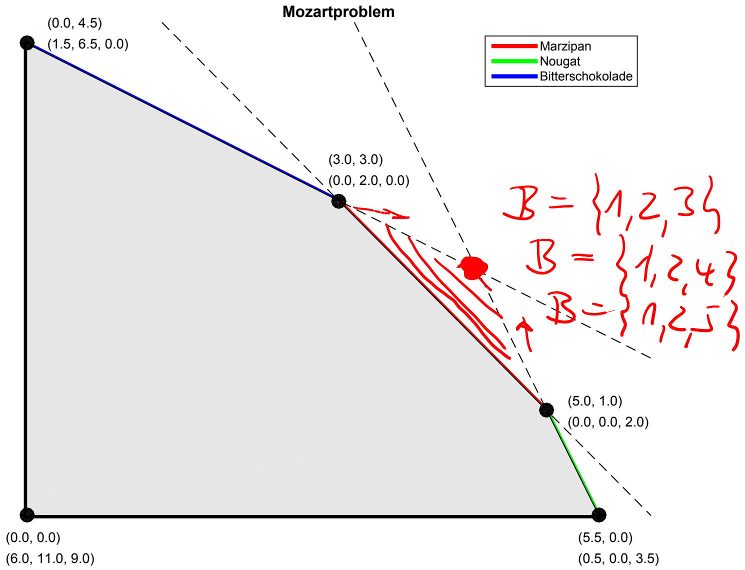
$\boxed{A_B x_B = b}$

$B = \{3, 4, 5\}$
$N = \{1, 2\}$

$B = \{1, 3, 5\}$
$N = \{2, 4\}$

$x_4 < 0 \longrightarrow B = \{1, 4, 5\}$

Basisvektoren mit mehreren Darstellungen



Welche Fragen gibt es?