Plenum 01

Grundlagen der Optimierung
Wintersemester 2021

22.10.2021 und 25.10.2021

Modellierung
Grundbegriffe
Existenz von Minimierern
Optimalitätsbedingungen

Welche Fragen gibt es? (Freitag)

- zu Definition 1.1 (*iii*) (Optimalwert)
- zum Beweis von Existenzsatz 1.4
  $\rightsquigarrow$ korrigiert mit Version 20211022
- zur Vorstellung der positiven Semidefinitheit von Matrizen
- zur stetigen Abhängigkeit der Eigenwerte einer Matrix von den Einträgen
  $\rightsquigarrow$ dazu gibt es eine Übungsaufgabe
- zur unentscheidbaren Lücke bei/trotz Verwendung von Ableitungen bis zur 2. Ordnung

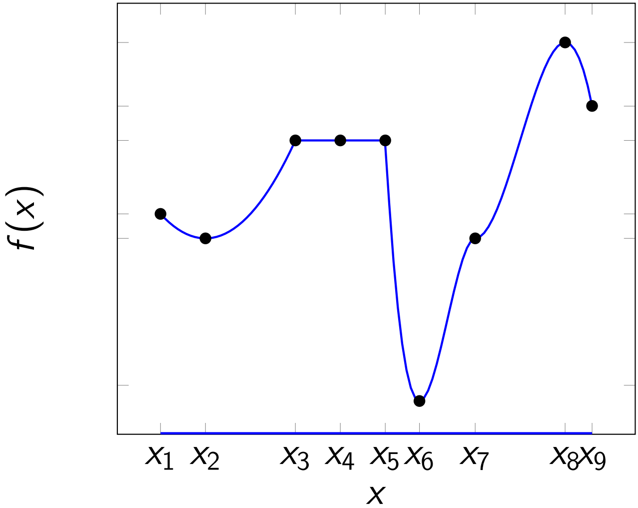
Welche Fragen gibt es? (Montag)

- Welche Voraussetzungen an die Zielfunktion werden grundsätzlich gestellt?
  Das steht im jeweiligen Abschnitt bzw. Satz dabei.
- zum Unterschied zwischen notwendigen und hinreichenden Bedingungen 2. Ordnung (Satz 3.2 und Satz 3.3)
- Sind Funktionen wie
  $$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$ unterhalbstetig?
  $\rightsquigarrow$ Ja

Welche Fragen gibt es? (Montag)

- Kann man Satz 3.2 auch direkt beweisen?
  $\rightsquigarrow$ Ja, das ist problemlos möglich.
- Kann ein Punkt x^*, der die notwendigen Bedingungen 1. und 2. Ordnung erfüllt, ein lokaler Maximierer sein?
  $\rightsquigarrow$ Eine Antwort wird im Plenum am 29.10.2021 besprochen.
- Kann man Gleichungsnebenbedingungen $h(x) = 0$ in der Optimierung nicht immer als Ungleichungen $h(x) \leqslant 0$ und $-h(x) \leqslant 0$ umschreiben?
  $\rightsquigarrow$ Ja, aber das hat gewisse praktische Nachteile, siehe z. B. Kapitel über lineare Optimierung

Grundbegriffe



Kurze Zwischenfrage

Was gilt an Punkten wie x_4, die gleichzeitig lokaler Minimierer und lokaler Maximierer sind?

Optimierungsaufgaben ohne Minimierer

Wir suchen Beispiele für Optimierungsaufgaben, die keine lokalen oder globale Minimierer besitzen, und zwar

1. mit Optimalwert $f^* = \infty$
2. mit Optimalwert $f^* = -\infty$
3. mit endlichem Optimalwert $f^* \in \mathbb{R}$

Modellierungsaufgaben

Es folgen drei Aufgaben zur Modellierung. Gesucht ist jeweils die Formulierung als mathematisches Optimierungsproblem:

- Was nehmen wir als Optimierungsvariable? Was bedeutet sie?
- Was nehmen wir als Zielfunktion?
- Welche Nebenbedingungen sind zu stellen?

Modellierung: Angebotsauswertung

Ein Unternehmen will eine bestimmte Menge M eines Gutes einkaufen und holt dazu Angebote von n Lieferfirmen ein, von denen keine die gewünschte Gesamtmenge alleine liefern kann. Anbieter i liefert maximal die Menge m_i, wobei die Funktion $f_i(x_i)$ den Gesamtpreis in Abhängigkeit der Bestellmenge x_i angibt.

Bonusfrage: Welche Eigenschaft werden die Funktionen f_i in der Regel haben?

Modellierung: Transportproblem

Eine Firma besitzt zwei Fabriken F_1, F_2 und zwölf Verkaufsstellen $V_1, \dots, V_{12}$. Jede Fabrik F_i produziert pro Woche die Menge p_i eines bestimmten Produktes. Jede Verkaufsstelle V_j hat eine bekannte wöchentliche Nachfrage n_j an diesem Produkt, die gedeckt werden muss. Die Kosten, eine Einheit von Fabrik F_i zur Verkaufsstelle V_j zu transportieren, seien c_{ij}, und die zu transportierende Menge sei x_{ij}.

Modellierung: Projektionsaufgabe

Zu einer gegebenen Menge $C \subseteq \mathbb{R}^n$ und einem Punkt $p \in \mathbb{R}^n$ suchen wir einen Punkt in C, der p am nächsten liegt.

Existenzsatz

Satz (Existenz eines globalen Minimierers)

Die zulässige Menge $F \subseteq \mathbb{R}^n$ sei nichtleer. Weiter sei $f\colon F \to \mathbb{R}$ unterhalbstetig auf F. Für irgendein $m \in \mathbb{R}$ sei die Sub-Levelmenge

$$L := \{x \in F \mid f(x) \leqslant m\}$$

kompakt (abgeschlossen und beschränkt) in $\mathbb{R}^n$ und nichtleer. Dann besitzt die Aufgabe

$$\text{Minimiere} \quad f(x) \quad \text{über} \quad x \in F$$

mindestens einen globalen Minimierer.

Existenzsatz

Finden Sie Beispiele dafür, dass auf

1. die Unterhalbstetigkeit der Zielfunktion
2. die Abgeschlossenheit einer nichtleeren Sub-Levelmenge
3. die Beschränktheit einer nichtleeren Sub-Levelmenge

nicht verzichtet werden kann.

Existenzsatz: Lösungsvorschlag

1. f ist nicht unterhalbstetig:

$$\text{Minimiere} \quad f(x) := \begin{cases} x^2 & \text{für } x \leqslant 0 \\ x^2 - 1 & \text{für } x > 0 \end{cases}$$
$$\text{unter} \quad -1 \leqslant x \leqslant 1$$

2. Alle nichtleeren Sub-Levelmengen von f in F sind in $\mathbb{R}^n$ nicht abgeschlossen:

$$\text{Minimiere} \quad f(x) := 1/x \quad \text{über } x \in F := [1, 2)$$

3. Alle nichtleeren Sub-Levelmengen von f in F sind in $\mathbb{R}^n$ unbeschränkt:

$$\text{Minimiere} \quad f(x) := 1/x \quad \text{über } x \in F := [1, \infty)$$

Bedingungen 1. und 2. Ordnung

Finden Sie Beispiele für folgende Situationen in 1D und/oder 2D:

1. Es liegt eine lokale Minimalstelle vor, und die hinreichende Bedingung 2. Ordnung ist erfüllt.
2. Es liegt eine lokale Minimalstelle vor, und die notwendigen Bedingungen 1. und 2. Ordnung sind erfüllt, aber nicht die hinreichende Bedingung 2. Ordnung.

Bedingungen 1. und 2. Ordnung

Finden Sie Beispiele für folgende Situationen in 1D und 2D:

3. Es liegt keine lokale Minimalstelle vor, die notwendige Bedingung 1. Ordnung ist erfüllt, aber die notwendige Bedingung 2. Ordnung ist nicht erfüllt.
4. Es liegt keine lokale Minimalstelle vor, aber die notwendigen Bedingungen 1. Ordnung und 2. Ordnung sind beide erfüllt.

Bedingungen 1. und 2. Ordnung: Lösungsvorschlag

Wir minimieren jeweils f über ganz $\mathbb{R}$. Der interessante Fall tritt jeweils bei $x^* = 0$ auf:

1. $f(x) = x^2$: x^* wird durch die hinreichende Bedingung 2. Ordnung als (strikter) lokaler Minimierer bestätigt.
2. $f(x) = x^4$: Dieser Fall ist durch Bedingungen 2. Ordnung nicht entscheidbar.
3. $f(x) = -x^2$: x^* wird durch die notwendinge Bedingung 2. Ordnung als lokaler Minimierer ausgeschlossen.
4. $f(x) = x^3$: Dieser Fall ist durch Bedingungen 2. Ordnung nicht entscheidbar.