R. Herzog, G. Müller, M. Hashemi
Universität Heidelberg

Übung 10

Ausgabedatum: 22. Dezember 2021
Abgabedatum: 21. Januar 2022

Hausaufgabe 1. (Schranke an den Abstand zum globalen Minimierer) 5 Punkte

(i) Es sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ eine eigentliche, μ-stark konvexe Funktion und x^* ein globaler Minimierer von f über $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass

$$\|x - x^*\|^2 \le \frac{2}{\mu} \, |f(x) - f(x^*)|.$$

(ii) Geben Sie ein Gegenbeispiel an, das zeigt, dass Punkt (i) i. A. nicht gilt, wenn x^* kein globaler Minimierer von f ist.

Hausaufgabe 2. (Beispiele von Projektionsaufgaben) 6 Punkte

(i) Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$ eine Matrix mit $\operatorname{Rang}(A) = k$. Bestimmen Sie eine explizite Darstellung der orthogonalen Projektion auf einen linearen Unterraum der Form $U := \{x \in \mathbb{R}^n \,|\, x = Ay \text{ für ein } y \in \mathbb{R}^k\}$.

(ii) Zeigen Sie, dass die Konvexität der Zielmenge $C \subseteq \mathbb{R}^n$ in der Projektionsaufgabe (Beispiel 15.1) entscheidend für die Wohldefiniertheit der Aufgabe ist. Geben Sie dazu eine nichtleere, kompakte, nichtkonvexe Zielmenge C und einen Punkt $p \in \mathbb{R}^n$ an, bei dem die gesamte Menge C Lösung der Projektionsaufgabe (15.1) für den Punkt p ist.

Hausaufgabe 3. (Dimension eines affinen Unterraums) 7 Punkte

Beweisen Sie Lemma 15.7 aus dem Skript, also die folgenden Aussagen für einen affinen Unterraum $A \subset \mathbb{R}^n$.

(*i*) Ist $\{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ eine affine Basis von A, dann lässt sich jedes Element von A auf eindeutige Art und Weise aus $\{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ affinkombinieren. Genauer hat jedes $x \in A$ die Darstellung

$$x = \sum_{i=0}^{k} \alpha_i \, x_i$$

mit Koeffizienten $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_k)^\mathsf{T}$, die sich aus der eindeutigen Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ | & & | \\ x_0 & \cdots & x_k \\ | & & | \end{bmatrix}}_{=:B} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ | \\ x \\ | \end{pmatrix}}_{=:b} \tag{$*$}$$

ergeben. Die Matrix $B \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(k+1)}$ hat Rang $k+1$. Daher ist $B^\mathsf{T} B$ regulär, und ($*$) kann äquivalent als

$$B^\mathsf{T} B \, \alpha = B^\mathsf{T} b$$

geschrieben werden.

(*ii*) A besitzt genau dann eine affine Basis $\{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ aus $k+1$ Elementen mit $k \geq 0$, wenn $\dim A = k$ ist.

Hausaufgabe 4. (Satz von Carathéodory) 6 Punkte

Beweisen Sie den Satz 15.13 von Carathéodory, also die folgende Aussage:

Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beliebige Menge der Dimension k und $x \in \operatorname{conv}(M)$ eine Konvexkombination der Punkte $x_0, \dots, x_m \in M$ mit $m \geq 0$. Dann ist x bereits eine Konvexkombination von höchstens $k+1$ dieser Punkte.

Hinweis: Nutzen Sie, dass die Punkte $x_0, \dots, x_m \in M$ im Falle von $m > k$ affin abhängig sind.

Hausaufgabe 5. (Randlage von Maximierern konvexer Funktionen.) 3 Punkte

Es sei $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ konvex. Zeigen Sie: Wenn f sein *Supremum* in einem Punkt in $\operatorname{rel\,int}(\operatorname{dom} f)$ annimmt, dann ist f konstant auf $\operatorname{dom} f$.

Für die Abgabe Ihrer Lösungen zu diesem Übungsblatt verwenden Sie bitte die dafür vorgesehene Abgabefunktion in Moodle.