R. Herzog, G. Müller, M. Hashemi
Universität Heidelberg

Übung 05

Ausgabedatum: 17. November 2021
Abgabedatum: 26. November 2021

Hausaufgabe 1. (Diskrete Tschebyschow-Approximation) 6 Punkte

Zu einer gegebenen Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $a < b$, $a, b \in \mathbb{R}$ soll ein Polynom $p(t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \ldots + \alpha_n t^n$ vom Höchstgrad n so bestimmt werden, dass der maximale Abstand zur Funktion f in den Punkten $t_i \in [a,b]$ für $i = 1, \ldots, m$ minimal wird. Es soll also das Problem

$$\text{Minimiere} \quad \max_{i=1,\ldots,m} |p(t_i) - f(t_i)| \quad \text{über } (\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

gelöst werden. Formulieren Sie die Aufgabe als lineares Programm in Normalform.

Hausaufgabe 2. ("Steilster Abstieg" in der Indexwahl im Simplex-Algorithmus) 4 Punkte

Der Simplex-Algorithmus (Algorithmus 7.6) lässt einige Freiheit in der Wahl der Indizes, welche in die Basis aufgenommen werden sollen (Zeile 6) bzw. in die Nichtbasis aufgenommen werden sollen (Zeile 11). Für den Index, der in die Basis aufgenommen werden soll, ist eine Möglichkeit bspw. die Regel des steilsten Abstiegs, welche

$$r := \min(\arg\min\{\widetilde{c}_i \mid i \in N\}) \tag{$*$}$$

verwendet.

Geben Sie ein Beispiel an, das zeigt, dass die Wahl ($*$) nicht zum bestmöglichen Abstieg im Kostenfunktionalwert führen muss.

Hausaufgabe 3. (Post-Processing der Simplexphase I) 7 Punkte

Gegeben sei ein lineares Programm in Normalform (Gleichung (6.6)), für das o. B. d. A. $b \geq 0$ ist. Um das Optimierungsproblem mit dem Simplex-Algorithmus (Algorithmus 7.6) lösen zu können, benötigt man eine Anfangsbasis zu einem zulässigen Basisvektor. Wenn Rang $A = m$ ist und das Problem zulässig ist, dann kann ein solcher zulässiger Basisvektor durch Lösen des linearen Hilfsproblems (**Phase-I-Problem**)

$$\left.\begin{aligned} \text{Minimiere} \quad & \mathbf{1}^\top z \quad \text{über } (x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \\ \text{sodass} \quad & Ax + z = b \\ \text{und} \quad & x \geq 0, \quad z \geq 0 \end{aligned}\right\} \qquad \text{(Gleichung (7.7))}$$

mit $\mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1)^\top \in \mathbb{R}^m$ mit dem Simplex-Algorithmus bestimmt werden, siehe Satz 7.10. Ist der berechnete optimale Basisvektor $(x^*, 0)^\top$ des Hilfsproblems nicht entartet, dann kann die dazugehörige Basis B^* sofort als Anfangsbasis für die Lösung des Ursprungsproblems verwendet werden. Andernfalls kann die Basis B^* noch Indizes in $\{n+1, \ldots, n+m\}$ enthalten und muss daher modifiziert werden. Wie das geht, sehen wir hier.

Es seien Rang $A = m$ und ein entarteter optimaler Basisvektor des Phase-I-Problems $(x^*, z^*)^\top$ mit $z^* = 0$ zur Basis B^* gegeben. Weiter sei $\ell \in \{n+1, \ldots, n+m\} \cap B^*$.

(i) Zeigen Sie, dass ein Index $r \in \{1, \ldots, n\} \setminus B^*$ existiert, sodass für den durch $[A, \mathrm{Id}_m]_{B^*} d_{B^*} = a_r$ definierten Vektor d die Aussage $d_\ell \neq 0$ gilt.

(ii) Zeigen Sie, dass $(x^*, 0)^\top$ für jeden Index r, der die Eigenschaft aus Punkt (i) besitzt, ebenfalls ein Basisvektor zur Indexmenge $B^+ := (B^* \cup \{r\}) \setminus \{\ell\}$ ist.

(iii) Beschreiben Sie, wie Sie einen Index r, der die Eigenschaft aus Punkt (i) besitzt, praktisch bestimmen können und wie Sie mit diesem Vorgehen aus einem optimalen Basis nach der Phase-I-Optimierung eine Anfangsbasis für die Optimierung des Ursprungsproblems generieren können.

Hausaufgabe 4. (Zyklen im Simplex-Verfahren haben mindestens die Länge 3) 10 Punkte

Zeigen Sie, dass ein im Simplex-Verfahren soeben aus der Basis entfernter Index im nächsten Simplex-Schritt nicht sofort wieder in die Basis aufgenommen werden wird.

Hinweis: Zeigen Sie, dass der Vektor der reduzierten Kosten im betreffenden Eintrag positiv sein wird. Verwenden Sie dazu die Cramersche Regel.

Für die Abgabe Ihrer Lösungen zu diesem Übungsblatt verwenden Sie bitte die dafür vorgesehene Abgabefunktion in Moodle.