R. Herzog, G. Müller, M. Hashemi
Universität Heidelberg



# Übung 04

Ausgabedatum: 10. November 2021
Abgabedatum: 19. November 2021

**Hausaufgabe 1.** (Überführen auf Normalform) 4 Punkte

Gegeben sei die lineare Optimierungsaufgabe

$$\begin{aligned} \text{Maximiere} \quad & -2\,x_1 - 3\,x_2 - 4\,x_3 \quad \text{über } x \in \mathbb{R}^3 \\ \text{sodass} \quad & x_1 + x_2 + x_3 \le 4 \\ & 3\,x_2 + x_3 \le 6 \\ & x_1 \le 2 \\ & x_3 \le 3 \end{aligned}$$

Überführen Sie das lineare Optimierungsproblem in ein äquivalentes Problem in Normalform.

**Hausaufgabe 2.** (Modellierung eines Ernährungsproblems) 5 Punkte

Das Original dieser Aufgabe (englisch: *nutrition problem*) findet sich in G. B. Dantzig (1963). *Linear Programming and Extensions*. The Rand Corporation. DOI: `10.7249/R366`, Seite 117. (George Dantzig ist der Erfinder der Simplex-Methode.)

Für die sechs unten stehenden Nahrungsmittel seien die Nährwerte und die Anschaffungskosten pro Pfund und die täglichen Referenzwerte für die Zuführung der Nährwerte für eine Person wie unten gegeben.

| | Contents and Costs Per Pound Purchased | | | | | | Daily | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Bread | Meat | Potatoes | Cabbage | Milk | Gelatin | Requirements | |
| Calories | 1254 | 1457 | 318 | 46 | 309 | 1725 | 3000 | |
| Protein | 39 | 73 | 8 | 4 | 16 | 43 | 70 | (grams) |
| Calcium | 418 | 41 | 42 | 141 | 536 | – | 800 | (mg.) |
| Vitamin A | – | – | 70 | 860 | 720 | – | 500 | (I.U.) |
| Cost | \$ 0.30 | \$ 1.00 | \$ 0.05 | \$ 0.08 | \$ 0.23 | \$ 0.48 | Minimum | |

($i$) Beschreiben Sie die Frage, in welchen Mengen diese Nahrungsmittel angeschafft werden sollten, um den täglichen Bedarf der Nahrungsmittel einer Person für einen Tag möglichst kostengünstig abzudecken, als lineare Optimierungsaufgabe in Normalform.

($ii$) Modifizieren das LP aus Punkt ($i$) für den Fall, dass, bis auf die Kalorien, alle Nährwerte überschritten werden dürfen. Stellen Sie sicher, dass auch dieses LP Normalform hat.

($iii$) Modifizieren das LP aus Punkt ($i$) für den Fall, dass, bis auf die Kalorien, alle Nährwerte um 10% überschritten werden dürfen. Stellen Sie sicher, dass auch dieses LP Normalform hat.

**Hausaufgabe 3.** (Ecken sind zulässige Basisvektoren) 3 Punkte

Beweisen Sie Satz 6.16 aus dem Skript, also die folgende Aussage: Es sei $P$ wie in (6.8) ein Polyeder in Normalform, und es gelte $\operatorname{Rang}(A) = m$. Dann sind äquivalent:

($i$) $x \in \mathbb{R}^n$ ist eine Ecke von $P$.

($ii$) $x \in \mathbb{R}^n$ ist zulässiger Basisvektor von $P$ zu einer geeigneten Basis.

**Hausaufgabe 4.** (Jeder zulässige Basisvektor kann optimal sein.) 3 Punkte

Es sei $x^*$ ein zulässiger Basisvektor zur Basis $B$ des durch $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ beschriebenen Polyeders

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b,\ x \geq 0\}.$$

Zeigen Sie, dass ein Kostenvektor $c \in \mathbb{R}^n$ existiert, sodass $x^*$ die einzige Optimallösung des Problems

$$\begin{aligned} \text{Minimiere } & c^\mathsf{T} x \quad \text{über } x \in \mathbb{R}^n \\ \text{sodass } & Ax = b \\ \text{und } & x \geq 0 \end{aligned}$$

ist.

**Hausaufgabe 5.** (Innerste Punkte eines Polyeders) 7 Punkte

Es sei ein Polyeder $P$ (also der Schnitt von $m$ Halbräumen) gegeben und mit $a_i \in \mathbb{R}^n$ und $b_i \in \mathbb{R}$, $i \in \{1, \ldots, m\}$ durch

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a_i^\mathsf{T} x \le b_i,\ i = 1, \ldots, m\}$$

beschrieben. Für jeden Punkt $x \in P$ untersuchen wir den größtmöglichen Radius $r(x)$, so dass die abgeschlossene Kugel mit Mittelpunkt $x$ und Radius $r(x)$ noch vollständig im Polyeder $P$ liegt. Ein Maximierer von $r(x)$ über $P$ heißt **Tschebyschow-Zentrum** oder **innerster Punkt** von $P$. Ein solcher Punkt hat also den größtmöglichen Abstand zu den Seitenflächen des Polyeders.

($i$) Formulieren Sie die Aufgabe, ein Tschebyschow-Zentrum des Polyeders $P$ zu finden, als ein lineares Optimierungsproblem in Normalform.

($ii$) Zeigen Sie, dass jedes beschränkte, nichtleere Polyeder ein Tschebyschow-Zentrum mit endlichem Kugelradius besitzt.

($iii$) Geben Sie ein Polyeder an, das unendlich viele Tschebyschow-Zentren mit endlichem Kugelradius besitzt.

($iv$) Geben Sie ein nichtleeres Polyeder an, das kein Tschebyschow-Zentrum besitzt.

Für die Abgabe Ihrer Lösungen zu diesem Übungsblatt verwenden Sie bitte die dafür vorgesehene Abgabefunktion in Moodle.

## Literatur

Dantzig, G. B. (1963). *Linear Programming and Extensions*. The Rand Corporation. DOI: 10.7249/R366.